Ioan-Iovițț Popescu
Anatolie Hristev
Nicolae Gherbanovschi
George Enescu

MF

Mic memorator de fizică

36.773

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with CamScanner

Cuprins

1. Mecanica (I. I. Popescu, §1.1—1.5.2. A. Hristev §1.5.3—1.12)

1.1. Cinematica punctului material 7
1.2. Dinamica punctului material 12
1.3. Lucrul mecanic și energia 26
1.4. Mecanica relativistă 36
1.5. Dinamica newtoniană a sistemelor de particule 43
1.6. Dinamica rigidului 51
1.7. Sistemele de referință neinerțiale 63
1.8. Elasticitate 67
1.9. Mecanica fluidelor 74
1.10. Oscilații mecanice 81
1.11. Unde elastice 91
1.12. Sisteme acustice 98

2. Căldura, fizica moleculară și termodinamica (A. Hristev) . . 101

2.1. Termometrie 101
2.2. Dilatometrie 105
2.3. Calorimetrie 108
2.4. Legile gazelor 112
2.5. Teoria cinetico-moleculară a gazelor 115
2.6. Gazele reale 121
2.7. Lichide 125
2.8. Elemente de termodinamică 126

3. Electricitatea (N. Gherbanovschi) 142

3.1. Electrostatica 142
3.2. Electrocinetica 161
3.3. Curentul electric în electroliți 165
3.4. Curetul electric în vid și prin gaze 167
3.5. Semiconductorii 169
3.6. Electromagnetismul 171
3.7. Rețele electrice trifazate 189
3.8. Mașini electrice 191

4. Optica (G. Enescu) 198

4.1. Natura luminii 198
4.2. Emisia și absorbția energiei radiante. 201

Scanned with CamScanner

4.3. Fotometrie 204
4.4. Propagarea luminii 207
4.5. Reflexia luminii 210
4.6. Refracţia luminii 212
4.7. Dioptrul 220
4.8. Aplicaţii 223
4.9. Interferenţa luminii 237
4.10. Difracţia luminii 240
4.11. Difracţia razelor X 241
4.12. Polarizarea luminii 242
4.13. Efectul fotoelectric 244
4.14. Efectul Compton 247
4.15. Presiunea luminii 248

5. Fizica atomică şi nucleară (G. Enescu). 249

5.1. Atomul 249
5.2. Nucleul atomic 255
5.3. Particule elementare 265
5.4. Acceleratoare de particule 268

Scanned with CamScanner

Handbook of Phisics (Contents)

1. Mechanics 7

1.1. Particle kinematics 7
1.2. Particle dynamics 12
1.3. Work and energy 26
1.4. Relativistic mechanics 36
1.5. Newtonian dynamics of systems of particles 43
1.6. Rigid body dynamics 51
1.7. Noninertial frames 63
1.8. Elasticity 67
1.9. Fluid mechanics 74
1.10. Oscillations 81
1.11. Elastic waves 91
1.12. Acoustic systems 98

2. Heat, molecular physics and thermodynamics 101

2.1. Thermometrics 101
2.2. Expansion 105
2.3. Calorimetry 108
2.4. Gas laws 112
2.5. Kinetic theory of gases 115
2.6. Real gases 121
2.7. Fluids 125
2.8. Thermodynamics 126

3. Electricity 142

3.1. Electrostatics 142
3.2. Electrocinetics 161
3.3. Electric current in electrolyts 165
3.4. Electric current in vacum and gases 167
3.5. Semiconductors 169
3.6. Electromagnetism 171
3.7. Threefasic electrical networks 189
3.8. Electric generateors and motors 191

4. Optics 198

4.1. Nature of light 198
4.2. Emission and absorbsion of radiative energy 201

Scanned with CamScanner

4.3. Photometer 204
4.4. Propagation of light 207
4.5. Reflection of light 210
4.6. Refraction of light 212
4.7. Spherical Refracting Surface 220
4.8. Mirrors and lenses 223
4.9. Interference of light 237
4.10. Difraction of light 240
4.11. X- Rays difractions 241
4.12. Polarisation of light 242
4.13. Photoelectric effect 244
4.14. Compton effect 247
4.15. Pressure of light 248

5. Atomic and nuclear physics 249

5.1. The atom 249
5.2. Atomic nucleons 255
5.3. Elementary particles 265
5.4. Particles accelerateors 268

Scanned with CamScanner

1.
Mecanica

Mecanica studiază forma cea mai simplă de mișcare a materiei, anume deplasarea corpurilor în spațiu și timp.

1.1. Cinematica punctului material

1. **Traiectoria** reprezintă locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punctul material în spațiu.

Moduri de descriere geometrică a mișcării :

a) Se dă traiectoria descrisă de mobil și legea (ecuația) de mișcare pe această traiectorie

$$s = s(t) \tag{1.1}$$

adică abscisa curbilinie în funcție de timp (fig. 1.1).

b) Să considerăm un sistem de trei axe rectangulare *Oxyz* (fig. 1.1). *Vectorul de poziție* $\vec{r}$ al punctului material este vectorul cu originea în *O* și vîrful în punctul ocupat de punctul material la momentul respectiv, deci

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \tag{1.2}$$
$$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ fiind vectorii unitate (versorii) ai celor trei di-

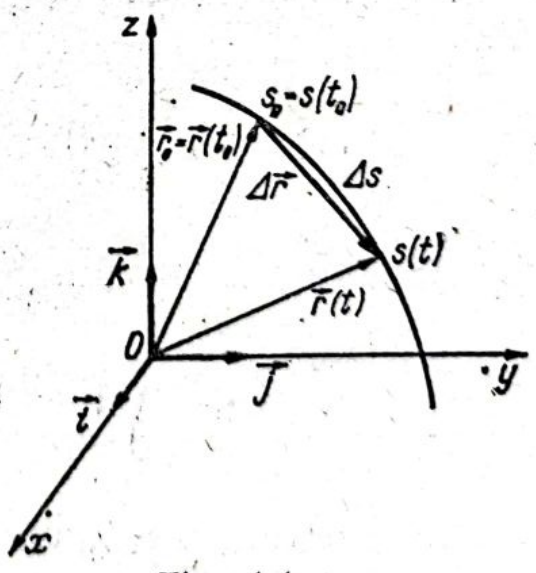


Fig. 1.1.

Scanned with CamScanner

recții ale sistemului de referință. Atît traiectoria, cît și legea de mișcare a punctului material pe traiectorie, sînt date de ecuația vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$ respectiv de ecuațiile parametrice ale traiectoriei

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{1.3}$$

cu timpul t ca parametru.

2. **Viteza** $\vec{v}$ este un vector care indică, în fiecare moment, variația vectorului de poziție $\vec{r}$ raportată la unitatea de timp. Prin definiție avem, deci,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \tag{1.4}$$

Viteza scalară sau viteza pe traiectorie indică variația coordonatei curbilinii s în unitatea de timp (punctul deasupra unei mărimi înseamnă derivata în raport cu timpul a acelei mărimi)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}, \tag{1.5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{|\mathrm{d}s|}{\mathrm{d}t} = |v|,\ [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Coordonata curbilinie a mobilului pe traiectorie este deci

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t, \tag{1.6}$$

iar lungimea drumului parcurs de mobil

$$d = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}s| = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.6'}$$

Prin definiție rezultă că $\vec{v}$ are aceeași direcție cu $\mathrm{d}\vec{r}$, adică viteza este întotdeauna tangentă la traiectorie.

Scanned with CamScanner

Notînd cu $\vec{e}_t = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}s$ versorul tangent la traiectorie avem

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\vec{e}_t. \tag{1.7}$$

3. **Accelerația** $\vec{a}$ este un vector care indică, în fiecare moment, variația vectorului viteză în unitatea de timp, adică prin definiție

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t) + \ddot{z}(t)\vec{k}.$$

B.C.U.

Accelerația se descompune în

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{1.8}$$

unde $\vec{a}_t$ este accelerația tangențială, a_n — accelerația normală, iar ρ — raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat.

4. **Cazuri particulare de mișcare**

a) *Mișcarea uniformă* (rectilinie) se caracterizează prin constanța vectorului viteză ($\vec{v} = \text{const}$). Rezultă în acest caz

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,\mathrm{d}t + \vec{r}_0 = \vec{v}(t - t_0) + \vec{r}_0 \tag{1.9}$$

unde constanta de integrare este chiar vectorul de poziție la momentul inițial $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. Deoarece $\vec{v}$ este constant, rezultă că traiectoria este rectilinie ($\vec{v} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0)$). Evident, avem și $s(t) = v(t - t_0) + s_0$.

b) *Mișcarea uniform accelerată* se caracterizează prin constanța vectorului accelerație ($\vec{a} = \text{const}$). În acest caz

Scanned with CamScanner

avem

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dt + \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0 \qquad (1.10)$$

unde $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ este viteza la momentul inițial t_0; vectorul de poziție rezultă printr-o nouă integrare

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt = \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0. \qquad (1.10')$$

Traiectoria este plană, trecînd prin punctul $\vec{r}_0$ și fiind conținută în planul determinat de vectorii $\vec{v}_0$ și $\vec{a}$.

Dacă $\vec{a} \| \vec{v}_0$, traiectoria este rectilinie, în acest caz ecuația mișcării fiind

$$s(t) = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0; \qquad (1.10'')$$

dacă $av_0 > 0$ (sau $v_0 = 0$) mișcarea este *uniform accelerată*; dacă $av_0 < 0$ mișcarea este *uniform întîrziată*.

La *căderea liberă a corpurilor la suprafața Pămîntului* ($\vec{a} = \vec{g}$), alegînd pentru simplitate, $t_0 = 0$, înălțimea h și viteza v (axa de coordonate orientată vertical în sus) sînt date de

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad v = v_0 - gt. \qquad (1.11)$$

Avem de asemenea

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(h - h_0)}, \quad h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (1.11')$$

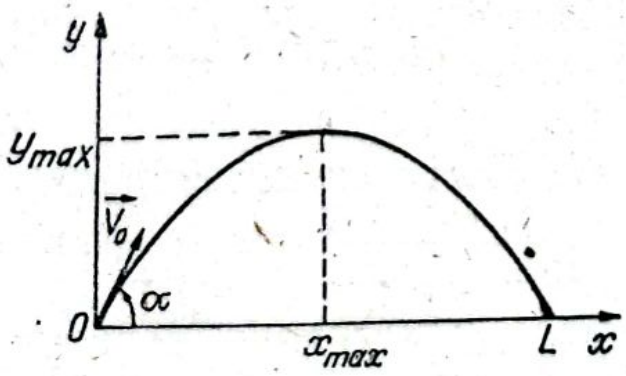


Fig. 1.2.

La *aruncarea oblică*, sub unghiul α *față de orizontală* (neglijînd frecarea cu aerul), coordonatele mobilului sînt date de (fig. 1.2, unde $x_0 = y_0 = 0$);

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \qquad (1.12)$$

Scanned with CamScanner

Prin eliminarea timpului, rezultă ecuaţia traiectoriei

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \tag{1.13}$$

care este ecuaţia unei parabole cu vîrful în punctul

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$
$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{1.14}$$

şi care taie axa Ox în punctele

$$x = 0 \text{ şi } L = 2x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \tag{1.14'}$$

distanţa maximă pe orizontală pentru v_0 dat, L_{max}, se obţine pentru $\alpha = 45°$ şi are valoarea v_0^2/g.

c). *Mişcarea circulară* (fig. 1.3). Traiectoria este circulară, iar viteza (liniară) v este

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \tag{1.15}$$

deoarece drumul parcurs de mobil pe circumferinţa cercului este $s = R\theta$. Mărimea

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \tag{1.15'}$$
$$[\omega] = 1 \text{ rad/s}$$

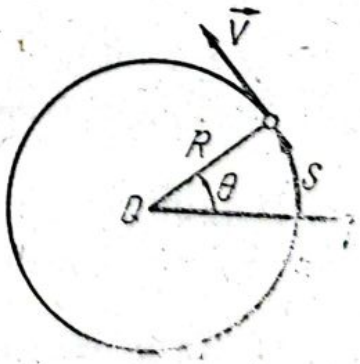


Fig. 1.3.

egală cu variaţia unghiului care reperează mobilul raportată la unitatea de timp, poartă numele de *viteză unghiulară*. Rezultă deci

$$v = R\omega. \tag{1.15''}$$

Scanned with CamScanner

În cazul *mișcării circulare uniforme* (ω = const, deci și v = const) mobilul revine prin fiecare punct la intervale de timp regulate, mișcarea fiind periodică, de *perioadă*

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad [T] = 1\text{s} \tag{1.16}$$

și *frecvență* (număr de rotații în unitatea de timp)

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [\upsilon] = \text{s}^{-1} \tag{1.16'}$$

sau $\omega = 2\pi\upsilon$. Componentele accelerației, în acest caz, sînt

$$a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0, \; a_n = v^2/R = R\omega^2. \tag{1.17}$$

Dacă ω nu este constant, mișcarea circulară este *variată*. Definim accelerația unghiulară prin

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}, \; [\varepsilon] = \text{rad/s}^2. \tag{1.18}$$

Dacă ε = const, mișcarea circulară este *uniform variată*. Atunci au loc relațiile

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \; \theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0). \tag{1.19}$$

1.2. Dinamica punctului material

Dinamica se bazează pe studiul cauzelor mișcării, făcînd apel la două noi concepte : masa și forța.

1. **Masa inertă** (sau inerțială) m a unui corp este o mărime care caracterizează *inerția* corpului. Experiența confirmă cu mare precizie identitatea dintre masa inertă (mărimea care intervine în legea a doua a lui Newton) și masa *gravifică* (care determină forța de atracție gravitațională).

Scanned with CamScanner

Mişcarea oricărui corp este un rezultat al *interacţiei* cu alte corpuri înconjurătoare, interacţie descrisă cantitativ cu ajutorul conceptului de *forţă*.

2. Exemple de forţă

a) *Forţa de gravitaţie*, produsă de Pămînt asupra unui corp situat la suprafaţa sa, numită şi *greutatea* corpului, G, are expresia

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2} \equiv G \tag{1.20}$$

unde $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ este constanta gravitaţiei universale, m = masa corpului; $M = 5{,}985 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ este masa Pămîntului şi $R \approx 6356$ km este raza Pămîntului. Notînd cu

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \tag{1.21}$$

acceleraţia gravitaţiei, greutatea corpului se mai poate scrie $G = mg$.

În general, pentru două mase punctiforme m_1 şi m_2, aflate la distanţa r una de alta, expresia vectorială a forţei de gravitaţie este

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.20'}$$

unde semnul „minus" arată că forţa este de atracţie, fiind orientată în sens opus vectorului $\vec{r}$. Această forţă reprezintă, de exemplu, interacţia care cauzează mişcarea unui satelit în jurul Pămîntului*.

b) *Forţa coulombiană* în vid dintre două sarcini electrice punctuale q_1 şi q_2 are o formă similară

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.22}$$

---

* Notînd cu $g_0 = \gamma M/R^2$ acceleraţia gravitaţiei la suprafaţa Pămîntului, la înălţimea h avem $g = \gamma M/(R+h)^2$, adică

$$g = g_0 R^2/(R+h)^2 \tag{1.21'}$$

Scanned with CamScanner

unde $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} C^2(N \cdot m^2)$ este permitivitatea vidului. Semnul sarcinilor electrice determină și sensul forței (de atracție sau de repulsie). Mișcarea unui electron în atom este rezultatul unei astfel de interacții cu nucleul și cu ceilalți electroni din atom.

c) *Forța electromagnetică* (Lorentz)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.23}$$

se exercită asupra oricărei particule, încărcată cu sarcina electrică q (pozitivă sau negativă), care se mișcă cu viteza $\vec{v}$ într-un spațiu în care există cîmpul electric $\vec{E}$ și cîmpul de inducție magnetică $\vec{B}$. Prin intermediul cîmpurilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ se exercită asupra particulei acțiunea mediului înconjurător.

d) *Forțe elastice.* Dacă supunem un solid la o deformare, distanțele dintre ionii, atomii sau moleculele constituente ale solidului se modifică. Echilibrul inițial al forțelor de legătură (în general tot de natură electrică) este perturbat. Dacă această perturbare nu este prea mare, apar forțe care tind să restabilească echilibrul, rezultanta acestor forțe fiind proprorțională cu deformația. Notînd cu x deformația pe o direcție, forța elastică corespunzătoare are forma

$$F = -kx \tag{1.24}$$

unde k este o constantă de proporționalitate (numită constanta forței sau constanta elastică); semnul „minus" arată că sensul forței este opus deformației (cazul resortului). Astfel de forțe guvernează, de exemplu, mișcarea de vibrație a nucleelor în molecule sau în solide.

e) *Forțe nucleare.* În afară de forțele gravitaționale și electromagnetice se mai cunosc în prezent încă două tipuri de forțe și anume *forțe nucleare* (interacții tari) și *forțe de interacție slabă.* Forțele nucleare se exercită între protoni și neutroni, fiind responsabile de stabilitatea nucleelor; ele sînt independente de sarcina electrică, fiind aceleași între doi protoni, doi neutroni, sau între un proton și un neutron, cu condiția ca spinii să fie în aceeași situație (paraleli sau antiparaleli).

Scanned with CamScanner

Forţele de interacţie slabă sînt responsabile pentru dezintegrarea radioactivă a nucleelor, însoţită de emisie de electron (sau pozitron). De acest tip sînt forţele care răspund de dezintegrarea neutronului (care este stabil cînd este legat în nucleu şi instabil cînd este liber):

neutron → proton + electron + antineutrino.

Interacţiile slabe guvernează de asemenea dezintegrarea miuonului:

miuon → electron + neutrino + antineutrino,

sau reacţii care au loc cu foarte mică probabilitate cum este, de exemplu:

neutrino + proton → miuon + neutron.

Cu toate că expresiile lor sînt diferite, pentru orientare în tabelul 1 sînt date intensităţile relative şi raza de acţiune a celor patru tipuri de forţe, fundamental distincte, cunoscute astăzi:

Tabelul 1

Tipul forţei	Intensitatea relativă	Raza de acţiune
Gravitaţie	$\sim 10^{-42}$	practic infinită (legea $1/r^2$)
Interacţie slabă	$\sim 10^{-14}$	$\lesssim 10^{-16}$ m
Interacţie electromagnetică	$\sim 10^{-2}$	practic infinită (legea $1/r^2$)
Interacţie tare	1	$\sim 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ m

3. Legile fundamentale ale dinamicii

1) *Legea inerţiei* (prima lege a lui Newton)

Un corp liber, de exemplu o *particulă liberă*, este acela care nu suferă nici o interacţie. Strict vorbind nu există particule libere, deoarece fiecare particulă interacţionează cu restul particulelor din Univers. Practic, însă, particula poate fi considerată liberă dacă este suficient de îndepărtată de alte corpuri (izolată) sau dacă acţiunea acestora se compensează în suficientă măsură, astfel că forţa externă rezultantă este pratic nulă.

Scanned with CamScanner

a) *Legea inerției* stabilește că: „*o particulă liberă se mișcă întotdeauna cu viteză constantă*", adică fără accelerație. Cu alte cuvinte, o particulă liberă se mișcă rectiliniu și uniform ($\vec{v} = \text{const}$) sau este în repaus ($v = 0$).

În formularea acestui principiu se face presupunerea esențială că mișcarea (deplasarea) particulei considerate se face față de un sistem de referință S (sistem de coordonate + ceasornic), care el însuși reprezintă o particulă liberă, respectiv un sistem de particule libere (corp liber), care nu interacționează cu restul lumii. Un astfel de sistem de referință sau observator se numește sistem de referință (reper) *inerțial** sau observator inerțial. Conform legii inerției, diferiții observatori inerțiali pot fi în mișcare unul față de altul cu viteză constantă.

b) *Mișcarea relativă: transformările lui Galilei și Lorentz.* Trecerea de la un sistem inerțial de referință S în care mobilul are coordonatele $\vec{r}(x, y, z)$ la momentul t la un alt sistem inerțial de referință S', în care același mobil are coordonatele $\vec{r}'(x', y', z')$, la momentul t' se face în *mecanică clasică* cu ajutorul *transformărilor lui Galilei.*

Cum ambele sisteme S și S' sînt inerțiale, mișcarea lor relativă este rectilinie și uniformă, adică (fig. 1.4)

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t \,(\vec{V} = \text{const}), \qquad (1.25)$$

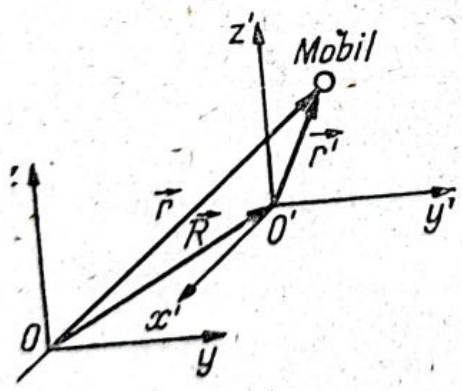


Fig. 1.4.

astfel că transformarea lui Galilei a coordonatelor mobilului, de la un sistem inerțial la altul se scrie

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}_0 + \vec{V}t, \; t' = t \qquad (1.26)$$

În particular luînd viteza relativă $\vec{V}$ paralelă cu Ox și $R_0 = 0$,

---

* Un sistem de referință legat de Pămînt nu este inerțial datorită rotației diurne și a mișcării accelerate în jurul Soarelui. Nici mișcarea Soarelui (deși în mult mai mică măsură) nu poate fi considerată ideal rectilinie și uniformă, datorită rotației acestuia în jurul centrului Galaxiei. În practică, însă, deseori este posibil ca Pămîntul să poată fi considerat cu bună aproximație, sistem inerțial de referință.

Scanned with CamScanner

avem :

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y', z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y, z' = z \\ t' = t. \end{cases} \tag{1.27}$$

Aceste legi de transformare nu *sînt valabile decît la viteze mici în comparație cu viteza de propagare a luminii în vid* ($V \ll c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s). Datorită faptului că viteza luminii în vid reprezintă o viteză limită, care nu poate fi depășită de nici o mișcare care transportă masă sau energie, *teoria relativității restrînse* (Einstein, 1905) a generalizat transformările de mai sus sub forma *transformărilor lui Lorentz* (vezi § 1.4).

c) *Principiul conservării impulsului.* Introducînd conceptul de *impuls* (cantitate de mișcare), definit prin vectorul $\vec{p} = m\vec{v}$, legea inerției poate fi reformulată mai general : „*o particulă liberă se mișcă cu impuls constant*" sau, pentru un *sistem izolat** *de particule* : „*impulsul total al unui sistem izolat de particule este constant*", adică

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.} \tag{1.28}$$

Nu se cunoaște nici o excepție de la acest principiu. De fapt, ori de cîte ori acest principiu pare să fie violat, se caută particule noi care pot fi responsabile pentru aparenta violare a principiului de conservare a impulsului. S-au descoperit pe această cale, neutronul, neutrino, fotonul și alte particule elementare.

Conform acestui principiu, variația $\Delta\vec{p}$ a impulsului unei particule, i, dintr-un sistem izolat, este egală cu variația *cu semn schimbat* a impulsului rezultant al restului sistemului, în același interval de timp

$$\Delta\vec{p}_i = -\sum_{j \neq i} \Delta\vec{p}_j \tag{1.29}$$

Pentru cazul particular al unui sistem izolat de particule fie, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ impulsurile invididuale la momentul

* Particulele care alcătuiesc sistemul izolat sînt supuse numai interacției lor mutuale.

Scanned with CamScanner

t și $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ impulsurile individuale la momentul t'. Notînd cu $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ variația impulsului individual, care a avut loc în timpul $\Delta t = t' - t$, din legea conservării impulsului total al sistemului izolat

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \text{const} \tag{1.30}$$

rezultă

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \tag{1.31}$$

adică variațiile impulsurilor, în același interval de timp, ale celor două particule care interacționează, sînt egale și de semn opus.

2) *Legea a doua a lui Newton.* Un observator inerțial remarcă dacă particula nu este liberă, prin aceea că viteza sau impulsul ei variază în timp, adică particula suferă o accelerație. *Viteza de variație în timp a impulsului unei particule este egală cu forța aplicată.*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{1.32}$$

exprimînd astfel legea a doua a lui Newton. Această lege poate fi privită și ca o consecință directă a principiului conservării impulsului.

Forma integrală a acestei legi dă variația impulsului într-un interval finit de timp

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t, \tag{1.33}$$

Observăm că forța poate fi măsurată independent de legea a II-a pe baza efectelor ei statice, de deformare a corpurilor elastice sau de echilibrare a altor forțe (greutatea etalon).

În cazul dinamicii nerelativiste ($v \ll c$) masa m este practic constantă, astfel că legea a doua se mai scrie

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ sau } m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \quad \text{sau} \quad m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \tag{1.34}$$

Scanned with CamScanner

adică : *dacă masa este constantă, forța este egală cu masa înmulțită cu accelerația.*

3) *Legea a treia a lui Newton.* Considerînd un sistem izolat de două particule care interacționează și notînd cu $\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$ forța care acționează asupra particulei 1 datorită interacției cu particula 2, și cu $\vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$ forța care acționează asupra particulei 2 datorită interacției cu particula 1, din principiul conservării impulsului total rezultă

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 ; \tag{1.35}$$

cînd două particule interacționează forța exercitată asupra unei particule este egală în modul și de sens opus cu forța care acționează asupra celeilalte particule (legea a treia a lui Newton).

4) *Principiul superpoziției acțiunii forțelor.* Dacă o particulă de masă m și impuls $\vec{p}$ interacționează simultan cu particulele m_1, m_2, m_3, ..., fiecare dintre acestea produce, în mod independent, cîte o variație a impulsului particulei m, caracterizată prin forțele respective $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... Variația totală a impulsului lui m este atunci

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \equiv \vec{F} \tag{1.36}$$

$\vec{F}$ fiind *forța rezultantă.* Acest principiu stabilește faptul că interacția dintre două particule de exemplu între m și m_1, nu este alterată de prezența particulelor m_2, m_3, ...; cu alte cuvinte, nu au loc fenomene de interferență, forțele acționînd în mod independent.

5) *Ecuațiile mișcării.* Conform legii a doua a lui Newton, putem urmări mișcarea unei singure particule, reducînd interacția sa cu restul lumii la un singur termen, pe care l-am denumit forță

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t), \tag{1.37}$$

Scanned with CamScanner

Cunoscînd forţa rezultantă (cele trei componente ale sale), în funcţie de loc şi timp, cele trei necunoscute $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$, care determină în fiecare moment poziţia mobilului în spaţiu, rezultă ca soluţii ale unui sistem de trei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea (ecuaţiile micării)

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, t),\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, t),$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, t). \tag{1.38}$$

6) *Exemple.* a) *Căderea liberă la suprafaţa Pămîntului* Alegînd axa Oz pe verticală şi orientată în jos (în sensul lui $\vec{g}$), avem

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \text{ sau } m\ddot{z} = mg \text{ sau } \ddot{z} = g;$$

integrînd de două ori, cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $z = z_0$, $v = v_0$, avem :

$$\dot{z} = gt + v_0,\ z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + v_0.$$

b) *Aruncarea sub unghiul α faţă de orizontală.* Componentele pe Ox şi Oy (fig. 1.2) ale ecuaţiei vectoriale a mişcării $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ sînt : $m\ddot{x} = 0$; $m\ddot{y} = -mg$.

Integrînd de două ori, cu condiţiile iniţiale $t=0$, $x=0$, $y = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, avem $x(t) = v_0 t \cos \alpha$, $y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

c) *Forţe de frecare.* Ori de cîte ori avem două corpuri în contact, apare o rezistenţă care se opune mişcării relative a celor două corpuri. *Forţa de frecare F_f*, care apare la suprafaţa de contact dintre două solide, depinde de forţa normală $\vec{N}$ (fig. 1.5), pentru multe scopuri practice putînd fi considerată proporţională cu aceasta

$$F_f = \mu N ; \tag{1.39}$$

coeficientul de frecare μ depinde de natura suprafeţelor, viteza relativă etc. Notînd cu $\vec{v}$ viteza relativă a celor două suprafeţe în contact, respectiv cu $(\vec{v}/v)$ versorul pe direcţia şi sensul mişcării, ecuaţia de mişcare a unui solid pe o supra-

Scanned with CamScanner

față solidă se scrie

$$m\vec{a} = \vec{F} - \mu N \frac{\vec{v}}{v}. \tag{1.40}$$

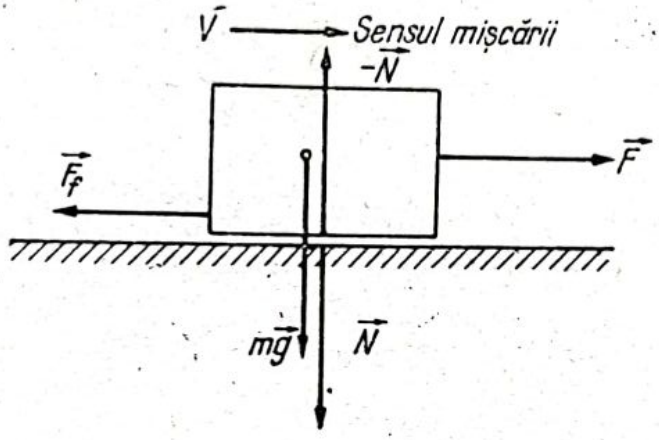


Fig. 1.5.

Mișcarea cu frecare pe un plan înclinat (fig. 1.6). Forțele care acționează asupra corpurilor sînt: forța apli-

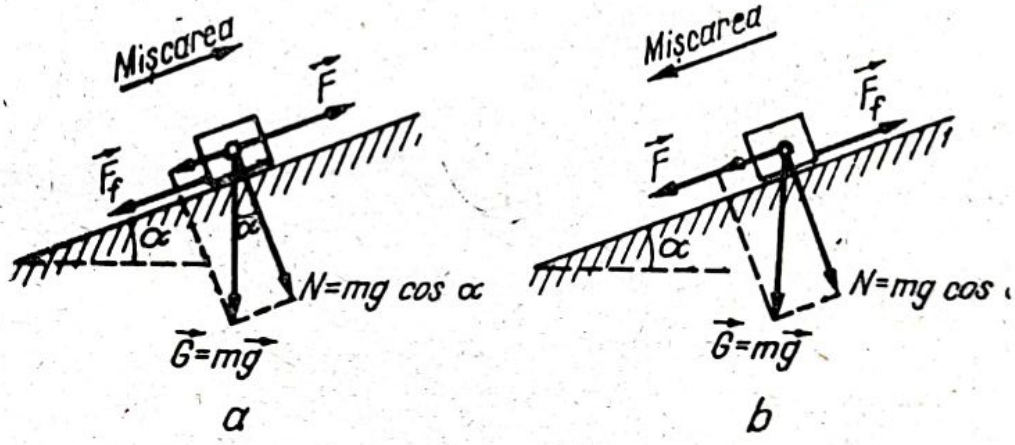


Fig. 1.6.

cată $\vec{F}$, greutatea corpului $\vec{G} = m\vec{g}$ și forța de frecare, $\vec{F}_f$, orientată întotdeauna în sens opus sensului mișcării. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, ecuația de mișcare în *lungul planului înclinat* se scrie

$$ma = F - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \tag{1.41}$$

dacă corpul se deplasează „la deal" (fig. 1.6 *a*);

$$ma = F + mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \tag{1.41'}$$

Scanned with CamScanner

dacă corpul se deplasează la vale (fig. 1.6 *b*). Dacă se cunoaște accelerația a se poate determina forța aplicată și invers. În cazul mișcării uniforme, $a = 0$.

d) *Forțe de frecare în fluide.* La mișcarea unui corp într-un fluid (lichid sau gaz) la viteze relativ mici, forța de frecare poate fi aproximată prin expresia :

$$\vec{F}_f = -kl\eta\vec{v} \tag{1.42}$$

unde k este un coeficient care depinde de forma corpului, η este *coeficientul de vîscozitate* al fluidului (η depinde de natura și de starea fluidului, în particular de temperatura fluidului), l — o dimeniune caracteristică a corpului, iar $\vec{v}$ este viteza corpului. La viteze mici, deci, forța de frecare este proporțională cu viteza și opusă ei ca sens. Coeficientul de vîscozitate η reprezintă frecarea internă dintre diferitele straturi de fluid, care se mișcă cu viteze diferite.

În cazul unui corp sferic, de rază, R, calculele arată că $k = 6\pi (l = R)$, adică forța de frecare în acest caz are forma :

$$\vec{F}_f = -6\pi R\eta\vec{v} \text{ (legea lui Stokes).} \tag{1.43}$$

Ecuația de mișcare a unui corp într-un fluid (cu frecare), sub influența unei forțe aplicate $\vec{F}$ (de exemplu în cîmp gravitațional $\vec{F} = mg$), se scrie

$$m\vec{a} = \vec{F} - kl\eta\vec{v}. \tag{1.44}$$

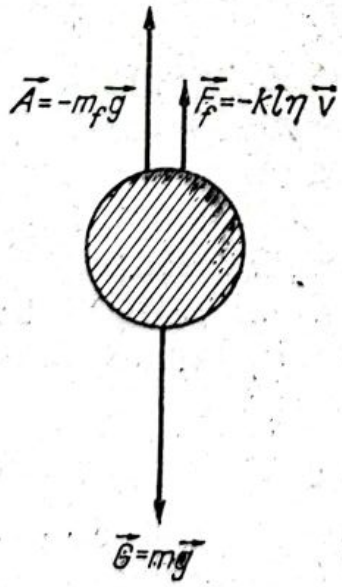


Fig. 1.7.

În cazul unei forțe $\vec{F}$ constante, viteza $\vec{v}$ crește în timp, deci și forța de frecare, pînă cînd membrul al doilea se anulează. Deci, după un timp suficient de lung, $a = 0$, și viteza finală constantă (viteza limită) capătă valoarea $\vec{v}_l = \vec{F}/(kl\eta)$; în cazul căderii, cu frecare, sub influența gravitației, avem $\vec{v}_l = mg/(kl\eta)$. Această ecuație trebuie corectată prin luarea în considerație a faptului că apare o forță ascensională suplimentară $\vec{A} = -m_f\vec{g}$, conform *principiului lui Arhimede* (fluidul exercită asupra corpului o forță ascensională

Scanned with CamScanner

egală cu greutatea fluidului dislocuit), unde m_f este masa fluidului dislocuit de către corp. Pentru viteza limită avem deci expresia

$$\vec{v}_l = \frac{(m - m_f)\vec{g}}{kl\eta}. \tag{1.45}$$

4. **Momentul cinetic**. Prin definiţie, faţă de o origine O, avem *momentul cinetic* (unghiular) definit prin vectorul (fig. 1.8)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{1.46}$$

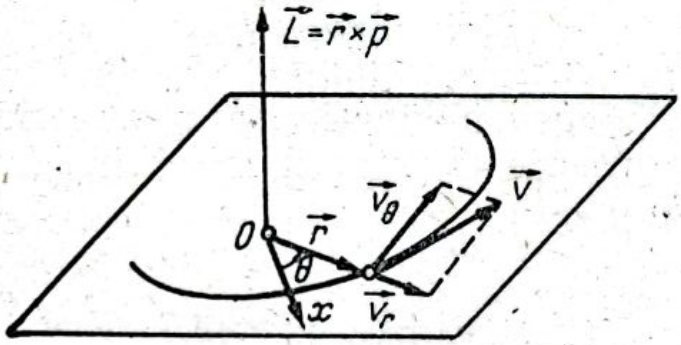


Fig. 1.8.

Această mărime caraterizează mişcarea de rotaţie a mobilului în jurul lui O; astfel de exemplu, dacă $\vec{L} = 0$, înseamnă că $\vec{v} \parallel \vec{r}$, mişcarea fiind numai radială. În cazul mişcării circulare, cu O în centrul cercului, vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{r}$ sînt perpendiculari şi avem $v = r\omega$, $L = mrv = mr^2\omega$.

În cazul unei mişcări plane curbilinii oarecare, putem descompune viteza în componentele ei, radială şi transversală, adică $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$, astfel că

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta \tag{1.47}$$

deoarece $\vec{r} \times \vec{v} = 0$ (cei doi vectori sînt paraleli).

În *coordonate polare* (r, θ) avem deci

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \tag{1.47'}$$

deoarece $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Scanned with CamScanner

Componentele carteziene ale momentului cinetic rezultă din

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}, \tag{1.48}$$

adică sînt date de expresiile :

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z,$$
$$L_z = xp_y - yp_x, \tag{1.48'}$$

În general, momentul cinetic $\vec{L}$ al unei particule variază în mărime și direcție în timpul mișcării. Variația lui în unitatea de timp este

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \tag{1.49}$$
$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ fiind momentul *forței* ($\vec{M}$ este o măsură a tendinței forței de a roti mobilul în jurul centrului O). Rezultă teorema generală : *„viteza de variație în timp a momentului cinetic este egală cu momentul forței"*, adică

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}. \tag{1.49'}$$

Dacă momentul forțelor este nul ($\vec{M} = 0$), *rezultă că momentul cinetic este constant* ($\vec{L} = const$) (*legea conservării momentului cinetic*).

5. **Aplicații.** a) *Mișcarea unei particule libere* (deci $\vec{F} = 0$, $\vec{M} = 0$, $\vec{v} = \text{const}$). În acest caz momentul cinetic este constant și are valoarea $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = mvr \sin \theta = mvd = \text{const}$ (fig. 1.9).

Scanned with CamScanner

b) *Mişcarea în cîmp de forţe centrale* (fig. 1.10). Astfel de forţe sînt, de exemplu, forţele coulombiene sau forţele de atracţie gravitaţională, direcţiile tuturor forţelor tre-

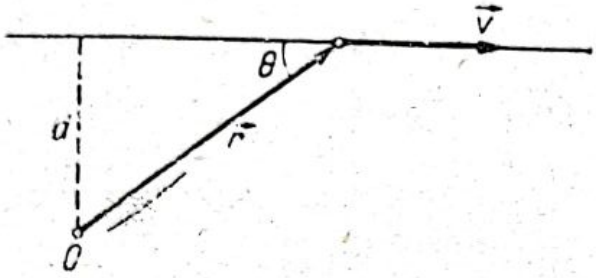


Fig. 1.9

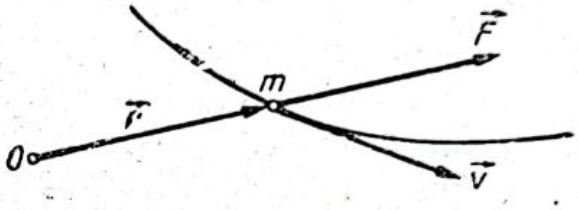


Fig. 1.10

cînd prin acelaşi punct, denumit centrul forţelor. Luînd originea O chiar în centrul forţelor, $\vec{F} \| \vec{r}$, deci $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \sim \sim \vec{r} \times \vec{r} = 0$, adică $\vec{L} = \text{const.}$ În concluzie, *în cazul forţelor centrale, momentul cinetic faţă de centrul forţelor este o constantă a mişcării.*

Acest rezultat este important deoarece multe forţe în natură sînt centrale. O primă consecinţă a constanţei vectorului $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ este că $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ sînt tot timpul în acelaşi plan, adică traiectoria este o curbă plană. O altă consecinţă importantă constă în aceea că *„raza vectoare mătură arii egale în timpi egali"* sau, cu alte cuvinte, *viteza areolară* (fig. 1.11) este constantă (*legea a doua a lui Kepler sau legea ariilor*)

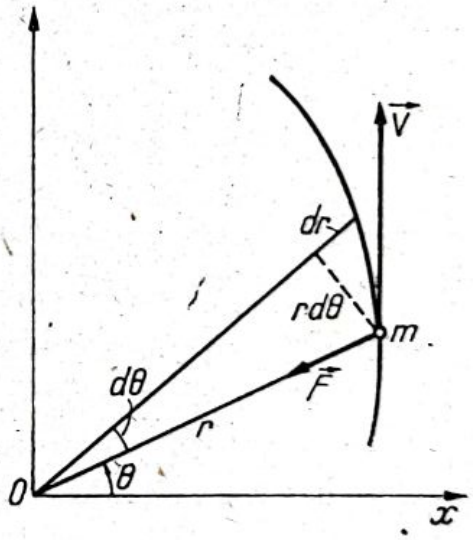


Fig. 1.11

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \qquad (1.50)$$

Electronul într-un atom de hidrogen se mişcă sub influenţa unei forţe centrale datorită interacţiei electrostatice (coulombiene) cu nucleul, sensul forţei fiind orien-

Scanned with CamScanner

tat intotdeauna înspre nucleu. Presupunînd pentru simplitate, prima orbită a electronului circulară în jurul nucleului și folosind valorile $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$kg, $r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m și $\omega = 4{,}13 \cdot 10^{16}\,s^{-1}$, rezultă pentru momentul cinetic al electronului, în atomul de hidrogen, valoarea $L = mr^2\omega = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$m^2·kg/s. Această valoare numerică reprezintă una dintre cele mai importante constante din fizică și se notează cu $\hbar$ („h barat", cantitatea $h = 2\pi\hbar$ poartă numele de *constanta lui Planck*); momentele cinetice ale particulelor elementare și atomice se exprimă de obicei în unități $\hbar$.

c) *Mișcarea în cîmp de forțe axiale.* Într-o moleculă, forța asupra unui electron nu este centrală, deoarece ea este rezultatul atracției produsă de nucleе și al repulsiei celorlalți electroni. În acest caz momentul cinetic al unui electron nu mai este constant. Într-o moleculă biatomică și, în general, într-o moleculă liniară, forțele pot fi considerate *axiale*, ele trecînd prin *axa moleculară*, luată de obicei ca axă Oz. Momentul total al forțelor asupra unui electron, față de centrul de greutate al moleculei (aflat pe axa moleculară), este cuprins, din motive de simetrie, în planul Oxy, perpendicular pe axa moleculară. Rezultă, în acest caz, $M_z = 0$, deci și $dL_z/dt = 0$, adică $L_z = \text{const.}$: *„în cazul forțelor axiale componenta momentului cinetic în lungul axei este constantă"*. Aceasta este un rezultat important în studiul structurii atomilor și moleculelor.

1.3. Lucrul mecanic și energia

1. **Lucrul mecanic** efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa mobilul pe elementul de drum $d\vec{r}$, în lungul traiectoriei, este, prin definiție * (fig. 1.12)

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,ds\cos\theta \quad (|d\vec{r}| = ds). \tag{1.51}$$

* Notăm cu δL și nu dL, deoarece expresia $\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y dy + F_z dz$ nu reprezintă neapărat o diferențială totală exactă; aceasta depinde de expresiile componentelor forței.

Scanned with CamScanner

Cum $F_t = F\cos 0$ este componenta forței în lungul deplasării, putem spune că lucrul mecanic este egal cu deplasarea, înmulțită cu componenta forței în lungul deplasării. Dacă forța este perpendiculară pe deplasare ($0 = 90°$), ea nu efectuează lucru mecanic (de exemplu: forța centripetă $ma_n = mv^2/r$ într-o mișcare circulară; forța magnetică Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ asupra unei particule încărcate, deoarece $\vec{F} \perp \vec{v}$, deci $\vec{F} \perp d\vec{r}$, forța de gravitație $m\vec{g}$ cînd corpul se mișcă pe un plan orizontal).

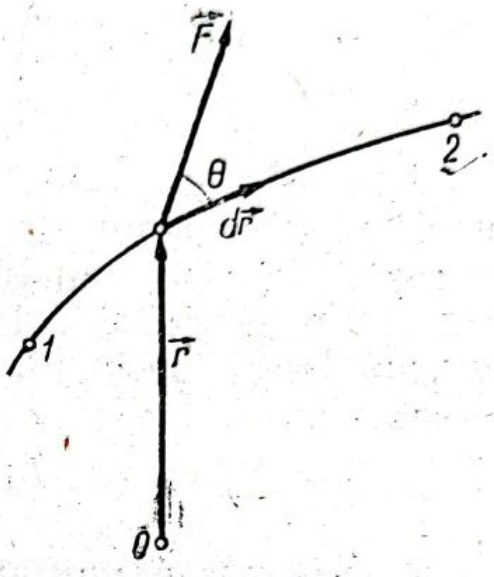


Fig. 1.12

Pentru o porțiune finită de traiectorie, lucrul mecanic total se obține prin însumare (integrare)

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (1.52)$$

2. **Puterea.** În aplicații este important să se cunoască lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp, adică puterea instantanee

$$P = \frac{\delta L}{dt} \quad \text{sau} \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \qquad (1.53)$$

3. **Energia cinetică.** Lucrul mecanic este efectuat numai de forța tangențială $F_t = F\cos 0$. Avem deci

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t\, ds =$$

$$= m\frac{dv}{dt}\, ds = m\, dv \frac{ds}{dt} = mvdv.$$

Scanned with CamScanner

Pe o porțiune finită de traiectorie între punctele (oarecare) 1 și 2, rezultă lucrul mecanic total

$$L_{12} = \int_1^2 F_t \, ds = \int_1^2 mv \, dv = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2. \quad (1.54)$$

Expresia $E_c = mv^2/2 = p^2/(2m)$ care are, evident, aceleași dimensiuni ca și lucrul mecanic L, se numește *energia cinetică* a mobilului de masă (considerată constantă!) m și viteză v. Prin urmare, *lucrul mecanic efectuat asupra unei particule este egal cu variația energiei sale cinetice*:

$$L_{12} = E_{c2} - E_{c1}. \quad (1.54')$$

4. **Energia potențială.** a) *Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă* $\vec{F} = \text{const}$

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_1^2 d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) =$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{r}_2 - \vec{F} \cdot \vec{r}_1.$$

Se vede că pentru astfel de forțe, lucrul mecanic nu depinde de forma traiectoriei mobilului (fig. 1.13); lucrul mecanic poate fi deci exprimat ca diferența dintre valorile unei funcții scalare $E_p(\vec{r})$, în punctul inițial și în punctul final. Această funcție de poziție (coordonatele) mobilului poartă, în general, numele de *energie potențială*. În cazul particular de față, $E_p(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$, deci

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2}.$$

În cazul forței de gravitație la suprafața pământului $\vec{F} = m\vec{g}$, deci

$$L_{12} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) =$$

$$= -mg\vec{k} \cdot [(x_2 - x_1)\vec{i} + (z_2 - z_1)\vec{k}] = mgz_1 - mgz_2$$

unde axa Oz a fost luată pe verticala locului. Avem, deci, în acest caz, $E_p(z) = mgz$.

Scanned with CamScanner

Observăm că, în general, energia potenţială este definită numai pînă la o constantă aditivă arbitrară, *lucrul me-*

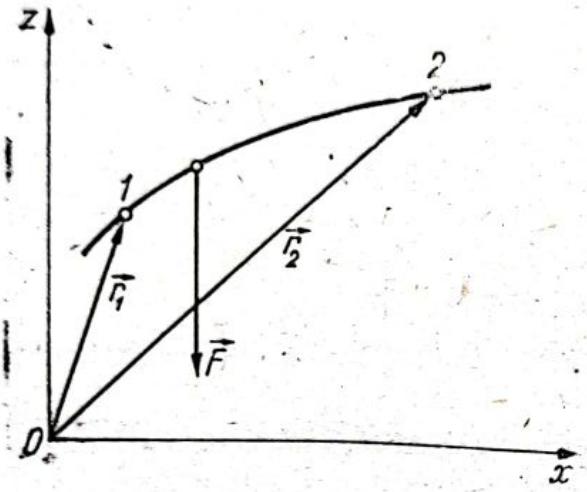


Fig. 1.13

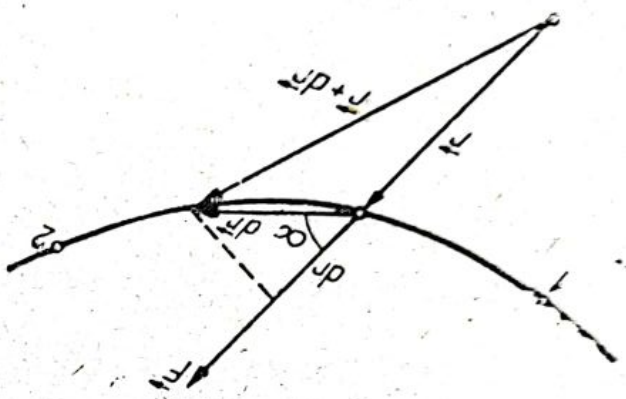


Fig. 1.14

canic efectuat între două puncte fiind dat numai de diferenţa *energiilor potenţiale* între cele două puncte. În general, avem deci, pentru exemplul de faţă $E_p(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r} + \text{const.}$, respectiv $E_p(t) = mgz + \text{const.}$; luînd pentru convenienţă, zero-ul înălţimii ($z = 0$) şi al energiei potenţiale ($E_p = 0$) la suprafaţa Pămîntului avem $E_p = mgz$.

b) *Forţe centrale coulombiene sau de gravitaţie între particule* (fig. 1.14) Forţa este, în acest caz, de forma

$$F(\vec{r}) = k\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

deci

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_1^2 F\,ds\cos\alpha = \tag{1.55}$$

$$= \int_1^2 F\,dr = k\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}.$$

Scanned with CamScanner

Expresia energiei potențiale este deci $E_p(r) = \frac{k}{r} + \text{const.}$

În acest caz este convenabil să se ia zero-ul energiei potențiale ($E_p = 0$) la infinit ($r = \infty$, astfel că $E_p(r) = k/r$.

c) *Forțe elastice.* Pentru forțe de tipul $F(x) = -kx$, lucrul mecanic este

$$L_{12} = \int_1^2 F(x)\,dx = -k\int_1^2 x\,dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Energia potențială are deci expresia $E_p(x) = \frac{kx^2}{2} + \text{const}$;

alegînd zero-ul energiei potențiale în poziția de echilibru a mobilului ($F = 0$, deci $x = 0$), avem $E_p(x) = kx^2/2$.

5. **Forțe conservative : legea conservării energiei.** Din exemplele de mai sus se vede că importante tipuri de forță permit scrierea lucrului mecanic în forma

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2}$$

unde $E_p(\vec{r})$ este o funcție scalară de punct (poziție), denumită *energie potențială*. Se vede deci că lucrul mecanic, pentru aceste tipuri de forțe, nu depinde de forma traiectoriei mobilului, ci numai de punctul inițial și final. Forțele care au această proprietate poartă numele de *forțe conservative*. Cum, pe de altă parte, lucrul mecanic este egal cu variația energiei cinetice $L_{12} = E_{c2} - E_{c1}$, rezultă $E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2}$ sau

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2};$$

cum punctele 1 și 2 au fost alese în mod arbitrar, rezultă că suma energiei cinetice și a energiei potențiale

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x, y, z) = \text{const.} \quad (1.56)$$

denumită *energie totală*, este constantă în orice punct al traiectoriei particulei care se mișcă într-un cîmp de forțe conservative.

Scanned with CamScanner

6. Relaţia dintre forţă şi energie potenţială. Relaţia sub formă integrală este, cum am văzut,

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv \int_1^2 F_t \, \mathrm{d}s = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p,$$

$F_t = F \cos 0$ fiind componenta tangenţială a forţei pe direcţia locală $\mathrm{d}\vec{r}$. Relaţia diferenţială corespunzătoare este, deci, $F_t \, \mathrm{d}s = -\mathrm{d}E_p$ sau

$$F_t = F \cos 0 = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s}.$$

Componenta forţei pe o direcţie se obţine prin derivarea (cu semnul minus) a energiei potenţiale pe acea direcţie, adică prin *derivata direcţională*. De exemplu, cele trei componente rectangulare ale forţei $\vec{F}$ se mai pot, astfel, scrie

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad (1.57)$$

unde am folosit simbolul *derivatei parţiale* „∂" deoarece în general, $E_p = E_p(\vec{r}) = E_p(x, y, z)$. Cînd un vector este astfel încît componentele lui pe orice direcţie sînt egale cu derivata direcţională a unei funcţii scalare pe acea direcţie, vectorul se numeşte *gradientul* acelei funcţii scalare şi se notează

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p \equiv -\nabla E_p. \qquad (1.57')$$

Simbolul ∇ (citeşte „nabla"), în faţa unei funcţii scalare, reprezintă o notaţie prescurtată pentru operatorul diferenţial „grad".

În coordonate rectangulare avem deci

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (1.57'')$$

Dacă mişcarea este plană şi folosim coordonatele polare (r, θ), deplasarea în lungul razei vectoare $\vec{r}$ este $\mathrm{d}r$,

Scanned with CamScanner

iar deplasarea perpendiculară pe raza vectoare este $r\,\mathrm{d}\theta$ (fig. 1.11). În acest caz componentele radială și transversală ale forței sînt

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}, \quad \text{respectiv} \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}. \qquad (1.58)$$

7. **Aplicații** a) *Mișcarea rectilinie.* Alegînd axa Ox pe direcția mișcării, legea conservării energiei se scrie

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + E_p(x) = \text{const.}$$

astfel că expresia generală a vitezei rezultă imediat

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}.$$

De exemplu, în cazul forțelor elastice, $E_p = (1/2)kx^2$; de asemenea, notînd cu A amplitudinea mișcării (cînd $x = A$, rezultă $v = 0$, deci $E_c = 0$, deci $E = (1/2)kA^2$), viteza mobilului este

$$v(x) = \sqrt{(k/m)\,(A^2 - x^2)}.$$

Revenind la cazul general al mișcării rectilinii și integrînd încă o dată expresia vitezei, avem soluția

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2/m)[E - E_p(x)]}} = \int_0^t \mathrm{d}t = t.$$

Cunoscînd expresia energiei potențiale, $E_p = E(x)$, relația de mai sus conduce la soluția ecuației mișcării $x = x(t)$. De exemplu, în cazul unei forțe constante $F = \text{const}$, energia potențială se calculează din relația $\mathrm{d}E_p = -F\,\mathrm{d}x$, sau integrînd $E_p = -Fx + C$; alegînd $E_p = 0$ la $x = 0$, avem $C = 0$ deci $E_p = -Fx$. Folosind soluția generală de mai sus,

$$\frac{1}{\sqrt{2/m}}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E + Fx}} = t$$

Scanned with CamScanner

sau

$$\frac{2}{F}(E + Fx)^{1/2} - \frac{2}{F}E^{1/2} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} t;$$

rezolvînd faţă de x,

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 + \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} t.$$

Dar $F/m = a$; de asemenea $E = (1/2)mv^2 + Fx$ este energia totală şi cum la $t = 0$, $x = 0$, $v = v_0$, rezultă că constanta $E = (1/2)mv_0^2$. Soluţia de mai sus devine cunoscuta expresie $x(t) = (1/2)\,at^2 + v_0 t$.

În *cîmpul de gravitaţie* de la suprafaţa Pămîntului, legea conservării energiei se scrie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const.}$$

Dacă iniţial ($t = 0$) particula este la înălţimea $z = z_0$ şi viteza sa $v_0 = v(z_0) = 0$, energia totală este $E = mgz_0$. Avem :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgz_0.$$

sau relaţia bine cunoscută

$$v^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh$$

unde $h = z_0 - z$ este distanţa de cădere.

În cazul unui pendul simplu (matematic) de masă m şi lungime l, notînd cu θ unghiul făcut faţă de poziţia de echilibru, avem $z_0 = l\cos\theta_0$, $z = l\cos\theta$. Legea conservării energiei

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

conduce imediat la expresia vitezei

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Scanned with CamScanner

b) *Mișcarea în cîmp central de forțe.* În acest caz este convenabilă folosirea unui sistem de coordonate polare, cu centrul în centrul forțelor. Expresia pătratului, vitezei necesară în legea conservării energiei, se scrie

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2$$

unde $L = mr^2\ d\theta/dt = \text{const.}$ este momentul cinetic. Legea conservării energiei se scrie

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{ef}(r)$$

unde $E_{ef}(r) = L^2/(2mr^2) + E_p(r)$ reprezintă o *energie potențială efectivă.*

Procedînd ca și în cazul mișcării liniare, avem, succesiv, viteza radială

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{ef}(r))};$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)[E - E_{ef}(r)]}} = \int_0^t dt = t$$

adică soluția mișcării radiale $r = r(t)$. Pentru a afla soluția mișcării unghiulare, $\theta = \theta(t)$, se folosește legea conservării momentului cinetic, din care rezultă viteza unghiulară

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2};$$

prin integrare avem

$$\theta = \theta_0 + \frac{L}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)}.$$

Ecuația traiectoriei $r = r(\theta)$ se află împărțind viteza radială la viteza unghiulară

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{L/(mr^2)}\sqrt{(2/m)[E - E_{ef}(r)]}$$

Scanned with CamScanner

sau, integrînd,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{(m/L)r^2\sqrt{(2/m)[E - E_{ef}(r)]}} = \int_{0_0}^{0} \mathrm{d}\,0 = 0 - 0_0.$$

Cunoscînd expresia forţei centrale, respectiv a energiei potenţiale $E_p(r)$, se pot determina $r(t)$, $0(t)$ şi $r(0)$ şi invers. În cazul forţelor centrale de tip coulombian sau gravitaţional, $F \sim 1/r^2$, $E_p \sim 1/r$ şi ecuaţia traiectoriei este o conică, cu focarul în centrul forţelor.

În cazul planetelor, curba plană ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const}$) este o conică, şi anume o elipsă cu Soarele (centrul forţelor) într-unul din focare (legea I-a a lui Kepler). Mai înainte am văzut că (în cazul mişcării centrale) raza vectoare Soare-Planetă mătură arii porporţionale cu timpul (fig. 1.11), adică viteza areolară $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ este constantă (legea a II-a a lui Kepler). Să demonstrăm legea a III-a a lui Kepler în cazul particular al unei traiectorii circulare. Folosind legea a doua a lui Newton, $ma = F$, şi ţinînd cont că avem numai acceleraţia normală $a_n = v^2/r$ putem scrie : $\dfrac{mv^2}{r} = \gamma \dfrac{Mm}{r^2}$ sau $v^2 = \gamma M/r$, M fiind masa Soarelui. Viteza unghiulară este $\omega = v/r = \sqrt{\gamma M/r^3}$ şi perioada de revoluţie $T = 2\pi/\omega$, şi se mai poate scrie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}} \text{ sau } T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3, \text{ adică } T^2 \sim r^3.$$

În general, legea a III-a a lui Kepler afirmă : *„pătratul perioadei de revoluţie este proporţional cu cubul axei mari a orbitei eliptice"*.

8. **Forţe neconservative.** Există forţe în natură care nu sînt conservative ; un exemplu este *forţa de frecare*, care se opune întotdeauna mişcării. Să considerăm pentru ilustrare, căderea unui corp printr-un fluid, sub influenţa forţei conservative gravitaţionale şi a forţei neconservative de frecare. Notînd cu E_p energia potenţială în cîmpul forţei conservative şi cu L' lucrul mecanic efectuat de forţele neconservative (în cazul frecării $L' < 0$,

Scanned with CamScanner

deoarece forța este opusă deplasării), lucrul mecanic total efectuat asupra corpului la deplasarea lui între punctele 1 și 2, este $L = E_{p1} - E_{p2} + L'$; cum, pe de altă parte, $L = E_{c2} - E_{c1}$, rezultă

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + L'$$

sau

$$(E_c + E_p)_2 - (E_c + E_p)_1 = L'. \qquad (1.59)$$

În acest caz se vede că mărimea $E = E_c + E_p$ nu rămîne constantă ci scade pe măsură ce corpul se deplasează. Lucrul mecanic neconservativ L' reprezintă deci un transfer de energie, în general ireversibil, către moleculele corpurilor care se freacă.

1.4. Mecanica relativistă

1. Postulatele (principiile) teoriei relativității. În paragrafele anterioare am considerat așa numita *mecanică clasică newtoniană* pentru studiul mișcării corpurilor. Una dintre presupunerile acestei mecanici este că masa m este o mărime invariantă pentru fiecare particulă sau sistem de particule. Această presupunere este valabilă, compatibilă cu experiențele atît timp cît vitezele observate nu sînt prea mari. Discrepanțe mari față de rezultatele mecanicii newtoniene se observă însă în studiul mișcării particulelor la energii mari, cum este de exemplu mișcarea electronilor în atomi sau a particulelor găsite în razele cosmice sau produse cu ajutorul acceleratorilor de energii înalte.

Bazat pe generalizarea faptelor experimentale (principiul inerției) și pe experiențe fizice certe (experiențele lui Michelson și Morley care au arătat că viteza luminii este independentă de mișcarea observatorului și a sursei), Einstein (1905) a elaborat *teoria relativității restrînse* postulînd următoarele principii:

1) Toate legile naturii (nu numai ale dinamicii) trebuie să fie aceleași (să aibă aceeași formă) în toate siste-

Scanned with CamScanner

mele de referinţă inerţiale care se mişcă cu viteza relativă constantă unul faţă de altul.

2) Viteza luminii în vid ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s) este un invariant fizic avînd aceeaşi valoare în toate sistemele de referinţă inerţiale.

3) Pentru viteze $v \ll c$, legile găsite în cadrul teoriei relativităţii restrînse trebuie să se reducă la legile mecanicii newtoniene.

Vom da pe scurt bazele teoriei relativităţii restrînse, numită astfel deoarece ea se aplică numai în sisteme inerţiale (cînd reperele nu sînt inerţiale se foloseşte teoria generală a relativităţii).

2. **Cinematica relativistă.** Să considerăm două sisteme inerţiale în mişcare relativă de-a lungul axei comune $Ox(O'x')$, cu viteza relativă constantă $\vec{v}=\text{const}$ (fig. 1.15). Cum viteza luminii observată de O şi O' trebuie să fie aceeaşi, distanţele şi duratele în cele două sisteme de referinţă trebuie astfel ajustate, încît raportul distanţă/timp pentru propagarea luminii să dea aceeaşi valoare c. Să presupunem că cei doi observatori inerţiali, O şi O', dau drumul la cronometre cînd poziţiile lor coincid ($t=t'=0$ cînd $x=x'=0$); în acelaşi moment ($t=0$) să presupunem că un semnal de lumină este emis din poziţia lor comună. După scurgerea timpului t observatorul O va nota că frontul undei de lumină a atins punctul P, situat pe sfera de rază $r=ct$, punctul ale cărui coordonate satisfac deci ecuaţia

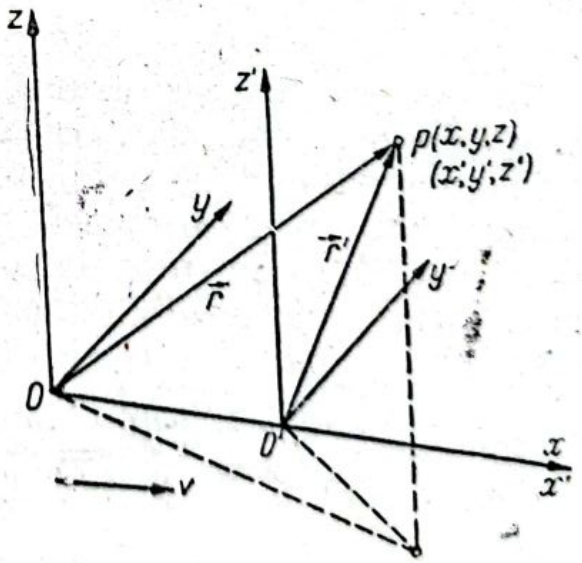


Fig. 1.15

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2; \quad (1.60)$$

cum c = invar, observatorul O' va nota că lumina a ajuns în punctul P după timpul t', coordonatele aceluiaşi punct în sistemul lui O' satisfăcînd ecuaţia sferei de rază

Scanned with CamScanner

$r' = ct'$, adică :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \qquad (1.60')$$

Singura transformare liniară posibilă, compatibiă cu invarianţa vitezei luminii (care să satisfacă ultimele două ecuaţii), în cazul mişcării relative din fig. 1.15 este dată de *transformările lui Lorentz* (speciale) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y', \ z = z' \\ t = \dfrac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y, \ z' = z \\ t' = \dfrac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (1.61)$$

unde $\beta = v/c$. Observăm că, în marea majoritate a problemelor practice $v \ll c$, astfel că termenii β^2 şi vx/v^2 pot fi neglijaţi, transformările lui Galilei fiind un caz particular al transformărilor lui Lorentz, valabil în limita vitezelor nerelativiste. Din punct de vedere principial, însă, transformările lui Lorentz conduc la schimbări conceptuale profunde, în special în ce priveşte spaţiul, timpul, masa şi energia.

3. Consecinţe ale transformărilor lui Lorentz. a) *Transformarea vitezelor.* În general la viteze relativiste (adică atunci cînd termenii de tipul β^2 şi vx/c^2 nu mai pot fi neglijaţi), regula clasică de adunare a vitezelor $u = v + u'$, trebuie înlocuintă printr-o relaţie mai complicată, care decurge din transformările lui Lorentz. Astfel, diferenţiind pe $x'(x, t)$ şi $t'(x, t)$, avem

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u_x\,dt - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1-\beta}}\,dt$$

$$dt' = \frac{dt - v\,dx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,dt.$$

unde u_x este componenta pe Ox, în sistemul $Oxyz$, a vitezei mobilului. Prin împărţire, se obţine componenta vitezei

Scanned with CamScanner

aceluiași mobil pe $O'x'$, în sistemul $O'x'y'z'$, adică

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}; \qquad (1.62)$$

în mod similar, se obține

$$u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}.$$

Ultimul grup de trei ecuații reprezintă transformrile lui Lorentz pentru viteze, adică regulile de compunere a vitezelor pentru un corp, măsurate în două repere inerțiale, ca în fig. 1.15. Pentru o particulă care se mișcă în direcția $Ox(O'x')$, avem $u_x = u$; $u_y = u_z = 0$; $u'_{x'} = u'$; $u'_{y'} = u'_{z'} = 0$; deci

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \qquad (1.62')$$

Se poate verifica ușor că această ecuație este compatibilă cu postulatul invarianței vitezei luminii; astfel, considerînd un semnal de lumină care se propagă pe Ox, adică luînd $u = c$, rezultă că $u' = \dfrac{c - v}{1 - vc/c^2} = c$. Viteza luminii în vid, c, nu poate fi depășită, deoarece factorul $\sqrt{1-\beta^2} \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ar deveni imaginar.

b) *Contracția lungimilor.* Să considerăm o bară legată solidar de sistemul S', așezată de-a lungul lui $O'x'$. *Lungimea proprie* a barei, $L' = x'_b - x'_a$, este măsurată de observatorul O', față de care bara este în repaus. Observatorul O, care vede bara în mișcare trebuie să măsoare coordonatele capetelor barei x_a și x_b la același *moment de timp* t și obține *lungimea cinematică* $L = x_b - x_a$. Folosind transformările lui Lorentz se obține

$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

prin scădere rezultă

$$L = \sqrt{1-\beta^2} \cdot L'. \qquad (1.63)$$

Scanned with CamScanner

Deoarece factorul $(1 - \beta^2)^{1/2} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} < 1$, rezultă $L < L'$, adică obiectele în mișcare apar mai scurte (contractate pe direcția mișcării $L_{mișcare} < L_{repaus}$).

c) *Dilatarea duratelor.* Un interval de timp este timpul scurs între două evenimente, de exemplu perioada unui pendul în oscilație este timpul scurs între două poziții succesive identice. Fie $T' = t'_b - t'_a$ *timpul propriu* în S', adică intervalul dintre două evenimente succesive observate de O' în *același loc* x'. Observatorul O (față de care O' este în mișcare cu viteza constantă v în direcția pozitivă a lui Ox), între aceleași evenimente, obține timpul cinematic $T = t_b - t_a$. Relația dintre intervalele de timp care separă cele două evenimente a și b, se obține din transformările lui Lorentz (considerînd același loc x').

$$t_a = \frac{t'_a + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_b = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

prin scădere se obține

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1.64}$$

adică $T > T'$, unde T' este intervalul de timp măsurat de observatorul O', aflat *în repaus* față de punctul unde au avut loc evenimentele, iar T este intervalul de timp măsurat de observatorul O, aflat *în mișcare* față de punctul unde au avut loc eveninentele ($T_{mișcare} > T_{repaus}$).

În concluzie, observăm că teoria relativității conduce la concepții noi și destul de îndepărtate de intuiția curentă. Cu toate acestea, toate consecințele acestei teorii au fost strălucit verificate de experiență.

4. **Dinamica relativistă.** a) *Variația relativistă a masei cu viteza.* Considerînd un exemplu de ciocnire a două particule identice și punînd condiția de conservare a impulsului total în două sisteme de referință inerțiale S, S' legate prin transformări Lorentz, obținem legea de variație a masei cu viteza

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.65}$$

Scanned with CamScanner

unde m_0 este *masa de repaus* a particulei (cînd $v = 0$), iar m este masa de mișcare măsurată de un observator față de care particula se mișcă cu viteza v. Evident pentru viteze mici ($v \ll c$), masa poate fi considerată, cu bună aproximație, constantă (fig. 1.16). Ultima relație este curent folosită în fizica atomică și nucleară, unde particulele se mișcă adesea cu viteze vecine cu viteza luminii. Ea a fost direct verificată experimental mai întîi cu ajutorul electronilor accelerați pînă la viteze mari.

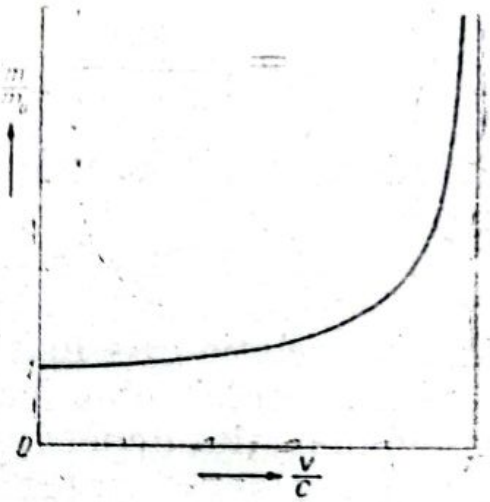


Fig. 1.16

b) *Impulsul și forța.* Impulsul unei particule de masă de mișcare m și viteză $\vec{v}$ se scrie deci

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.66}$$

iar *legea fundamentală a dinamicii relativiste* se scrie

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{1.67}$$

c) *Energia.* Reamintim că numai componenta tangențială F_t a forței efectuează lucru mecanic, adică conduce la variația energiei cinetice a particulei. Din ultima relație avem

$$\vec{F}_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{m}{1 - v^2/c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Energia cinetică, cîștigată de particulă atunci cînd viteza ei variază de la 0 la v, este deci

$$E_c = \int_0^v \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^v F_t\,\mathrm{d}s =$$

Scanned with CamScanner

$$= \int_0 \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \cdot v\,dt = \int_0^v \frac{m_0 v\,dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\Bigg|_0^v = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 ; \qquad (1.68)$$

ţinînd cont de dependenţa masei de viteză, avem finalmente

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2. \qquad (1.69)$$

Această relaţie este foarte sugestivă ea indicînd că o creştere a energiei cinetice se face pe baza unei creşteri a masei (datorită dependenţei masei de viteză). Cantitatea constantă $m_0 c^2$ poartă numele de *energie de repaus a particulei*, iar cantitatea

$$E = E_c + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1.70)$$

poartă numele de *energie totală a particulei* şi este, prin definiţie, egală cu suma energiei cinetice şi a energiei de repaus.

Eliminînd $\beta = v/c$ între expresia energiei totale $E = mc^2 = m_0 c^2/\sqrt{1 - \beta^2}$ şi expresia impulsului $p = mv = mc\beta$, rezultă relaţia generală dintre energia totală şi impuls

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (cp)^2. \qquad (1.71)$$

În cazul special în care masa de repaus a particulei este nulă ($m_0 = 0$), relaţia dintre energie şi impuls devine

$$E = cp \text{ sau } p = E/c ; \qquad (1.72)$$

o astfel de particulă trebuie să aibă impulsul $p = E/c = mc^2/c = mc$, mişcîndu-se deci cu viteza c în orice sistem inerţial. Acesta este cazul *fotonului*. Relaţia simplă $p = E/c$ este de asemenea aproximativ valabilă şi în cazul particulelor care se mişcă cu viteză comparabilă cu viteza luminii (astfel că $cp \gg m_0 c^2$).

Scanned with CamScanner

Folosind dezvoltarea în serie a binomului la viteze mici în comparație cu c, avem pentru masă

$$m = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) \tag{1.73}$$

iar pentru energia cinetică

$$E_c = (m - m_0)c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots; \tag{1.74}$$

se vede astfel, încă o dată, că mecanica newtoniană este o aproximație a mecanicii relativiste, valabilă pentru viteze mici ($v \ll c$), cînd putem deci considera $m = m_0$ și $E = (1/2)m_0v^2$.

1.5. Dinamica newtoniană a sistemelor de particule

În paragrafele anterioare am prezentat interacția particulei cu restul Universului cu ajutorul conceptului de forță sau de energie potențială, depinzînd numai de coordonatele particulei. În cele ce urmează vom considera dinamica unui ansamblu de particule nerelativiste ($v \ll c$), în raport cu un reper inerțial.

1. **Mișcarea centrului de masă.** Să considerăm un sistem de particule de mase $m_1, m_2, \ldots$; prin definiție *centrul de masă* (prescurtat : CM) este punctul de rază vectoare

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} \equiv \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}, \tag{1.75}$$

$M = \sum m_i$ fiind masa totală a sistemului. Viteza *centrului de masă* este deci

$$\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{M} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M}$$

sau

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \tag{1.76}$$

Scanned with CamScanner

unde $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ este impulsul total al sistemului; impulsul total este același ca și cum toată masa sistemului ar fi concentrată în centrul de masă care se mișcă cu viteza v_{CM}. Dacă sistemul este izolat, din principiul conservării impulsului $\vec{P}$=const, rezultă și $\vec{v}_{CM}$=const: centrul de masă al unui sistem izolat se mișcă cu viteză constantă în orice sistem inerțial de referință. Dacă sistemul de particule S nu este izolat și se găsește în interacție cu alt sistem de particule S' (fig. 1.17), considerînd că $S + S'$ formează un sistem izolat, putem scrie $\vec{P}_{S+S'} = \vec{P}_S + \vec{P}_{S'} =$ =const.; prin urmare, orice variație a impulsului ansamblului S este însoțită de o variație, egală în modul și opusă ca sens, a impulsului ansamblului S': $\Delta\vec{P}_S = -\Delta\vec{P}_{S'}$ sau, în unitatea de timp

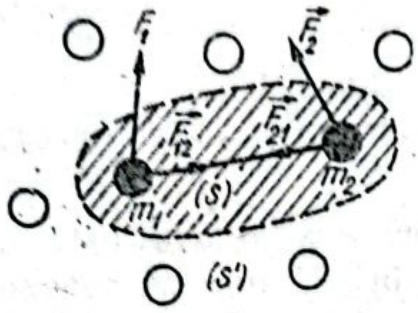


Fig. 1.17

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = -\frac{d\vec{P}_{S'}}{dt}.$$

Viteza de variație a impulsului ansamblului S este, prin definiție *forța externă* care se exercită asupra lui S datorită interacției cu S':

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \vec{F}_{ext} \text{ sau } \frac{d}{dt}\left(\sum_S \vec{p}_i\right) = \vec{F}_{ext}. \qquad (1.77)$$

Forțele interne dintre particulele din ansamblul S nu contribuie la variația impulsului $\vec{P}_S$, conform principiului conservării impulsului (rezultanta forțelor interne din sistem este nulă).

Notînd cu F'_{ext} forța externă exercitată asupra lui S' de către S, de mai sus rezultă

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}'_{ext},$$

adică legea acțiunii și reacțiunii pentru interacția dintre sistemele de particule S și S'.

Scanned with CamScanner

Deoarece $\vec{v}_{CM} = \vec{P}/M$, de mai sus rezultă de asemenea

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}, \qquad (1.78)$$

adică centrul de masă al unui sistem de particule se mișcă ca și cum ar fi o particulă de masă egală cu masa totală a sistemului și supusă la forța externă aplicată sistemului.

Sistemul inerțial de referință legat de laborator se numește *sistemul laboratorului* (*SL*). Sistemul de referință legat de centrul de masă al unui sistem și mișcat prin *translație* față de un reper inerțial se numește *sistemul centrului de masă* (SCM) În SCM avem $\vec{r}_{CM} = 0$, $\vec{v}_{CM} = 0$, $\vec{P} = 0$. În particular SCM poate fi inerțial, dacă centrul de masă de care este legat se mișcă rectiliniu uniform față de un reper inerțial. Experiențele efetuate într-un laborator sînt de obicei mai simplu de analizat în SCM decît în SL.

2. **Aplicație la un sistem de două particule** (m_1 și m_2). Notînd cu F_{12} forța internă asupra lui m_1, datorită interacției cu m_2 și cu $\vec{F}_1$ forța externă asupra lui m_1 datorită interacției cu alte particule (din afara sistemului), ecuația mișcării particulei 1, respectiv 2, se scrie

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21};$$

prin adunare, avem

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext}$$

deoarece legea acțiunii și reacțiunii cere ca $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Generalizînd pentru un sistem compus dintr-un număr arbitrar de particule, avem

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ext}, \qquad (1.79)$$

unde $\vec{F}_i$ este forța externă care acționează asupra particulei de masă m_i. Forța externă care acționează asupra

Scanned with CamScanner

unui sistem de particule este egală cu suma forţelor externe care acţionează asupra fiecăreia din particule componente.

a) *Masa redusă.* Să scriem ecuaţiile de mişcare pentru fiecare din componentele unui *sistem izolat* de două particule, în forma

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}\ ;\ \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}\ ;$$

scăzînd şi ţinînd cont că $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, rezultă

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}.$$

Observînd că $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{12}$ este viteza relativă a celor două particule iar $\vec{a}_{12} = d\vec{v}_{12}/dt$ este acceleraţia lor relativă, ultima ecuaţie se scrie

$$\mu\vec{a}_{12} = \vec{F}_{12} \tag{1.80}$$

unde mărimea μ, denumită *masa redusă* a sistemului de două particule, este definită prin

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{sau} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.81}$$

În concluzie mişcarea relativă a două particule, supuse *numai* interacţiei lor mutuale, este echivalentă cu mişcarea faţă de un observator inerţial, a unei particule de masă egală cu masa redusă, sub acţiunea forţei corespunzătoare interacţiei lor.

Dacă $m_1 \ll m_2$ (cazul sistemului electron — proton),

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} \approx m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right);$$

dacă $m_1 \approx m_2 = m$ (cazul sistemului neutron-proton).

$$\mu \approx m/2.$$

b) *Vitezele*: relaţiile dintre vitezele $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ în sistemul laboratorului (SL) şi în sistemul centrului de masă (SCM)

Scanned with CamScanner

pentru un sistem izolat de două particule. Avem :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

astfel că în SCM

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}, \qquad (1.82)$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -\frac{m_1\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}.$$

Impulsurile celor două particule în SCM se scriu simplu

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = \mu\vec{v}_{12} \text{ și } \vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\mu\vec{v}_{12}. \quad (1.82')$$

Se verifică, încă odată, că în SCM avem $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$.

3. **Momentul cinetic al unui sistem de particule.** Scriind teorema momentului cinetic (1.49′) pentru fiecare punct material al sistemului

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{M}_k = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^{int} + \vec{F}_k^{ext}), \; k = 1, 2, 3, \ldots,$$

însumînd aceste relații și ținînd seama că momentul rezultant al forțelor interne față de orice punct este nul, se obține

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}^{ext}, \; \vec{J} = \sum_k \vec{L}_k, \; \vec{M}^{ext} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{ext}, \quad (1.83)$$

$$\Delta\vec{J} = J_2 - \vec{J}_1 = \int_1^2 \vec{M}^{ext}\, dt. \qquad (1.83')$$

Variația momentului cinetic total $\vec{J}$ al unui sistem de particule, raportată la unitatea de timp, este egală cu momentul rezultant al forțelor externe în raport cu același pol dat.

Forțele *interne* nu pot schimba momentul cinetic total al sistemului. Cît timp momentul rezultant al for-

Scanned with CamScanner

țelor *externe* este nul, momentul cinetic al sistemului (în raport cu același pol fix) se conservă. De exemplu, la *ciocniri* apar numai forțe interne, de aceea momentul cinetic total al sistemului se conservă.

4. **Teorema energiei cinetice** pentru un punct material (1.54) devine pentru un sistem de particule

$$\Delta E_c = \sum_k \int \vec{F}_k^{int}\, d\vec{r}_k + \sum_k \int \vec{F}_k^{ext}\, d\vec{r}_k = W^{int} + W^{ext}, \tag{1.84}$$

$$E_c = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2.$$

Variația energiei cinetice a unui sistem de particule este egală cu lucrul mecanic efectuat atît de forțele externe cît și de forțele interne.

Pentru solidul *rigid* (nedeformabil) lucrul mecanic al forțelor interne este nul. În general însă, forțele interne efectuează un lucru mecanic de deformare, de exemplu ciocniri, producînd transformarea unei fracțiuni din energia cinetică a sistemului în alte forme nemecanice de energie (mai ales, căldură), sau creînd energie cinetică din alte forme de energie (chimică etc.)

5. **Teoremele de descompunere.**

a) $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, $\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$ (1.85)

b) $E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_c'$ (teorema lui S. König), unde

$\vec{L}$ este momentul cinetic *orbital* (extern), obținut ca și cum tot sistemul ar fi concentrat în CM, $\vec{S}$ este momentul cinetic *propriu* (intern) calculat în SCM; $\frac{1}{2} M v_c^2$ este energia cinetică de translație ca și cum tot sistemul ar fi concentrat în CM; E_c' este energia cinetică relativă, calculată în SCM.

Teorema momentului cinetic (1.83) și teorema energiei cinetice (1.84) sînt valabile nu numai într-un reper iner-

Scanned with CamScanner

ţial (SL), dar şi în SCM, oricare ar fi mişcarea de translaţie a acestuia (deci a CM) faţă de repere inerţiale.

6. **Ciocniri.** Prin *ciocnirea* a două sau mai multe corpuri se înţelege în general un *proces de interacţie*, în care atît înainte cît şi după interacţie corpurile se găsesc la distanţe mari unele faţă de altele, adică nu interacţionează înainte şi după ciocnire, deci *interacţia durează un timp finit.*

Dacă în urma ciocnirii starea *internă* a fiecărui corp *nu se schimbă*, ciocnirea se numeşte (perfect) *elastică.*

Dacă în urma ciocnirii corpurile fuzionează (se cuplează) şi continuă mişcarea împreună cu o viteză comună, ciocnirea se numeşte *total inelastică* (plastică).

Vom considera numai ciocniri de corpuri *macroscopice.*

Dacă descompunem viteza reltivă de ciocnire $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, a corpului 1 faţă de corpul 2, după normala comună NN' şi planul tangent de contact TT' (fig. 1.18), atunci dacă normala NN' trece, în momentul ciocnirii, prin centrele de masă ale celor două corpuri, ciocnirea se numeşte *centrică*, în caz contrar *acentrică*. Dacă înainte de ciocnire corpurile se mişcau după normala NN', deci $v_{rt}=0$, ciocnirea se numeşte *frontală*, în caz contrar *oblică*.

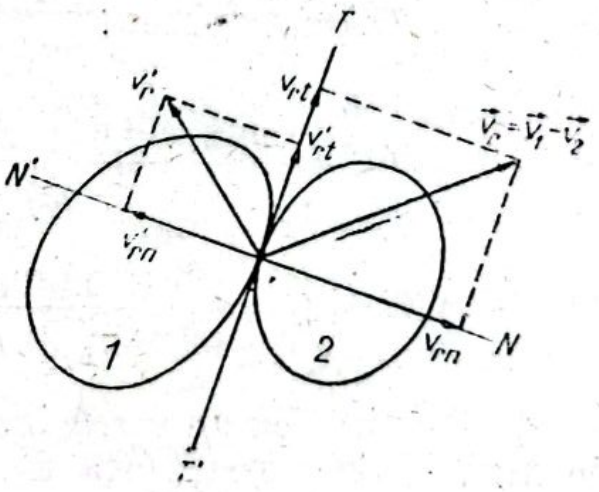


Fig. 1.18

Definim *coeficienţii de ciocnire*: *coeficientul de restituire* (Newton) k şi *coeficientul de frecare momentană* f:

$$k = -\frac{v'_{rn}}{v_{rn}} = -\frac{v'_{1n} - v'_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1,$$

$$f = \frac{v'_{rt}}{v_{rt}} = \frac{v'_{1t} - v'_{2t}}{v_{1t} - v_{2t}}, \quad 0 \leqslant f \leqslant 1. \tag{1.86}$$

Scanned with CamScanner

Pentru ciocnirea total inelastică (plastică) $\vec{v}_r' = \vec{v}_1' - \vec{v}_2' = 0$, deci $k = 0$ și $f = 0$. Pentru ciocnirea perfect elastică $k = 1$, $f = 1$.

În procesul ciocnirii apar forțe interne de percuție între corpuri, mult mai mari decît forțele externe obișnuite, de aceea în timpul foarte scurt cît durează ciocnirea efectul acestor forțe externe poate fi neglijat, astfel încît :

Impulsul total și momentul cinetic total ale sistemului de corpuri care se ciocnesc se conservă în procesul ciocnirii.

În cazul ciocnirii perfect *elastice* se conservă *și* energia *cinetică* totală a sistemului.

a) În ciocnirea total inelastică (plastică) a două corpuri :

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad -\Delta E_c = Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2. \tag{1.87}$$

b) În ciocnirea unidimensională parțial elastică cu coeficientul de restituire k ($f = 1$) ;

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \tag{1.88}$$

$$-\Delta E_c = Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2.$$

c) Ciocnirea cu un *perete* înseamnă ciocnirea cu un corp de masă foarte mare față de primul corp.

În cazul ciocnirii perfect elastice, centrice și frontale, cu un perete :

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \; v_2' = v_2 \tag{1.89}$$

și în cazul ciocnirii perfect elastice oblice cu un perete în repaus sub unghiul de incidență α :

$$v_t' = v_t, \; v_n' = -v_n, \; |\vec{v}'| = |\vec{v}|, \; |\Delta\vec{p}| = 2mv\cos\alpha. \tag{1.90}$$

Scanned with CamScanner

7. **Mișcarea unui corp cu masă variabilă.** Ecuația lui I. V. Meșcerski (1897) :

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad \vec{F}_r = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} - \text{forța reactivă}, \quad (1.91)$$

unde $\vec{v}_{rel}$ este viteza față de corp (rachetă) a particulelor alipit sau ejectate cu debitul $D = |dm/dt|$.

De exemplu, în cazul lansării pe verticală a unei rachete de pe Pămînt din repaus cu $v_{rel} = \text{const}$ în jos, avem :

$$v = |v_{rel}| \ln \frac{m_0}{m} - gt \quad (1.92)$$

cu condiția de desprindere $D > m_0 g / |v_{rel}|$.

1.6. Dinamica rigidului

1. **Mișcarea de translație.** a corpului este acea mișcare în care orice dreaptă legată rigid de corp se mișcă *paralel* cu ea însăși, adică pozițiile succesive ale acestei drepte în timpul mișcării sînt paralele între ele. Toate punctele corpului au traiectorii, viteze și accelerații identice, de aceea mișcarea de translație este complet determinată de mișcarea unui *singur punct* arbitrar al corpului. Vectorul vitezei de translație este un vector liber. În mișcarea de translație forma traiectoriei, identică pentru diferitele puncte ale corpului, poate fi oricare, de exemplu, circulară (fig. 1.19 *a*)

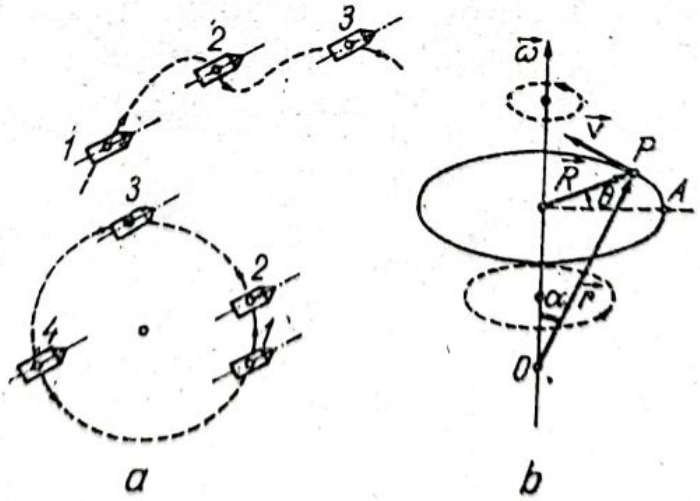


Fig. 1.19

2. **Mișcarea de rotație** a corpului este acea mișcare în care punctele corpului descriu cercuri paralele ale căror

Scanned with CamScanner

centre se găsec pe o dreaptă, numită *axă de rotaţie*, viteza unghiulară de rotaţie fiind *aceeaşi* pentru toate punctele corpului (fig. 1.19 *b*).

Viteza unghiulară ω se reprezintă printr-un vector alunecător (glisant) $\vec{\omega}$ situat pe axa de rotaţie (fig. 1.19 *b*). Atunci

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \; r \sin \alpha = R,$$

$$v = \omega R, \quad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}. \tag{1.93}$$

În general mişcarea de rotaţie poate fi neuniformă şi însăşi axa de rotaţie se poate schimba cu timpul. O măsură a acestei neuniformităţi a rotaţiei este vectorul acceleraţiei unghiulare

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}}. \tag{1.94}$$

Dacă $\vec{\omega}$ variază numai în modul (de exemplu, axă de rotaţie fixă), vectorul $\vec{\varepsilon}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$.

3. **Mişcarea arbitrară** a rigidului se poate descompune în fiecare moment într-o translaţie şi o rotaţie (fig. 1.20). Anume, alegînd un punct arbitrar O' al rigidului drept *punct de reducere*, numit *pol*, viteza oricărui punct al rigidului se descompune în fiecare moment într-o viteză de translaţie, comună tuturor punctelor rigidului şi egală cu viteza $\vec{r}_0$ a polului ales, plus o viteză de rotaţie momentană sau instantanee în jurul unei axe trecînd prin pol(Euler).

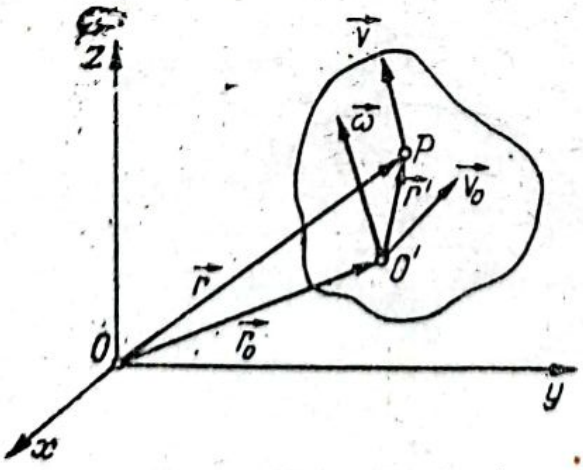


Fig. 1.20

$$\vec{v} = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_0' =$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0'. \tag{1.95}$$

Dacă schimbăm polul, viteza de translaţie se schimbă, fiind egală cu viteza noului pol, iar viteza unghiulară nu depinde de alegerea polului, deplasîndu-se echipolent în noul pol. O altă caracteristică intrinsecă, independentă de pol, este componenta vitezelor pe direcţia axei

Scanned with CamScanner

de rotație. Printr-o alegere adecvată a polului putem reprezenta în fiecare moment mișcarea arbitrară a rigidului ca o mișcare *elicoidală* (momentană sau instantanee), în general neuniformă, în care translația se face în direcția axei de rotație, analog mișcării de înaintare (rotație și translație) a unui șurub (drept sau stîng) într-o piuliță (teorema lui Chasles). Locul geometric descris de axa elicoidală față de corp se numește *axoidă mobilă*, iar față de SL, *axoidă fixă*. În fiecare moment deplasarea rigidului reprezintă o rostogolire a axoidei mobile, legată rigid de corp, peste axoida fixă în jurul axei elicoidale (generatoarea de contact dintre axoide) plus o translație de-a lungul axei.

Vom nota prescurtat: SC — sistem de coordonate, SR — sistem de referință, CM — centrul de masă.

Dacă rigidul are la un moment dat o mișcare relativă de translație și rotație, în raport cu un SR „mobil", care la rîndul său are o mișcare de transport(de antrenare) de translație și rotație, față de un SR considerat fix (absolut) atunci translația și rotația momentane, „absolute", adică față de SR fix, se obțin prin *compunerea vectorială* a translațiilor, ca vectori liberi, și a rotațiilor, ca vectori alunecători, de aceea axele de rotație trebuie făcute în prealabil *concurente* printr-o algere adecvată a polilor.

Derivînd descompunerea vitezelor (1.95), obținem *descompunerea accelerațiilor* unui rigid:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega; \quad \vec{a}_0 = \vec{v}_0, \quad \vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot} \quad (1.96)$$

unde $\vec{a}_0$ este accelerația translației, $\vec{a}_\varepsilon$ accelerația condiționată de $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$(în general diferă de $\vec{a}_t$), $\vec{a}_\omega$ accelerația axipetă (în general diferă de $\vec{a}_n$).

În cazul mișcării plan-paralele există în fiecare moment un punct numit *centrul instantaneu de rotație* sau *centrul vitezelor*, a cărui viteză este nulă în acel moment, astfel încît mișcarea apare ca o rostogolire fără lunecare a unei curbe mobile, legată de corp, numită *rostogolitoare* sau *rulantă*, peste o altă curbă fixă, anumită *bază*, punctul lor de contact fiind centrul instantaneu de rotație. Viteza oricărui punct al corpului este egală cu viteza unghiulară momentană de rotație înmulțită cu distanța pînă la

Scanned with CamScanner

centrul instantaneu de rotaţie. Dar din punct de vedere al distribuţiei *acceleraţiilor*, acestea apar generate de o rotaţie instantanee în jurul *centrului acceleraţiilor*, punctul care nu are acceleraţie în acel moment.

4. **Momentul de inerţie** al unui corp faţă de o axă se defineşte prin suma :

$$I = \sum_k m_k R_k^2 \quad \text{sau} \quad I = \int R^2 \, dm = \int \rho R^2 \, dV, \quad (1.97)$$

$$dm = \rho \, dV,$$

$$[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

unde m_k sînt masele particulelor şi R_k distanţele lor pînă la axa considerată. Pentru a caracteriza complet inerţia la rotaţie a unui corp se defineşte matricea (tensorul) momentelor de inerţie faţă de un SC dat, cu elementele (componentele)

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, \rho dV, \; I_{yy} = \int (z^2 + x^2) \rho dV,$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV, \; I_{xy} = I_{yx} = -\int xy \, \rho dV,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int yz \, \rho dV, \; I_{zx} = I_{xz} = -\int zx \, \rho dV \quad (1.98)$$

unde I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sînt momentele de inerţie faţă de axele de coordonate, iar I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} sînt momentele *centrifugale* (sau de deviaţie).

Dacă rigidul se roteşte cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul unei axe trecînd prin origine, momentul său cinetic (în raport cu originea) şi energia sa cinetică vor fi

$$\vec{J} = (\hat{I}, \omega) = \vec{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \vec{j}(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) + \vec{k}(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \quad (1.99)$$

$$E_c = \frac{1}{2}(\omega, \hat{I}\omega) = \frac{1}{2} I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\omega_y^2 +$$

Scanned with CamScanner

$$+\frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z +$$

$$+ I_{zx}\omega_z\omega_x = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\vec{J}\,\vec{\omega} \qquad (1.100)$$

unde $\hat{I}$ este matricea momentelor de inerţie iar I momentul de inerţie faţă de axa de rotaţie. În general $\vec{J}$ nu este paralel cu $\vec{\omega}$, componenta sa pe axa de rotaţie fiind $\vec{J}_{||} = I\vec{\omega}$.

Prin fiecare punct al corpului trec trei axe ortogonale între ele $Ox_{1,2,3}$ (fig. 1.21), numite *axe prinipale de inerţie* faţă de care matricea momentelor de inerţie devine dia-

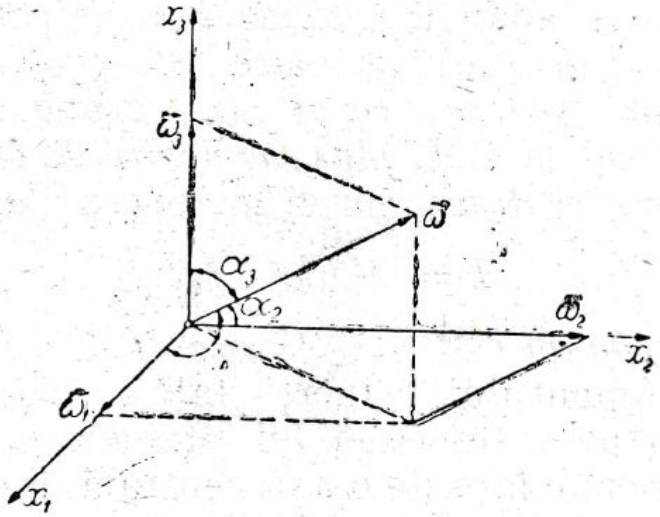


Fig. 1.21

gonală, adică momentele centrifugale se anulează. Atunci faţă de aceste axe momentul cinetic şi energia cinetică se scriu

$$\vec{J} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3,$$

$$E_c = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad (1.101)$$

$$I = I_1\cos^2\alpha_1 + I_2\cos^2\alpha_2 + I_3\cos^2\alpha_3, \qquad (1.102)$$

unde $I_{1,2,3}$ sînt momentele de inerţie principale, $\omega_{1,2,3}$ componentele vitezei unghiulare faţă de axele principale de inerţie, $\alpha_{1,2,3}$ — unghiurile axei de rotaţie cu axele principale. Se vede că $\vec{J}$ este paralel cu $\vec{\omega}$ numai dacă axa de rotaţie ($\vec{\omega}$) este o axă *principală*. În particular,

Scanned with CamScanner

prin centrul de masă (CM) trec trei axe principale *centrale*, de inerție, ortogonale între ele.

5. Teoremele de descompunere (1.85) față de CM, devin pentru un rigid

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},\ \vec{L} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM},\ \vec{S} = (\hat{I}_0\omega)$$
$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = E_{tr} + E_{rot} \qquad (1.103)$$

unde I_0 este momentul de inerție față de axa *centrală* corespunzătoare.

La aceasta se adaugă *teorema lui Steiner*: *Momentul de inerție I față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție orbital (extern), ca și cum corpul ar fi redus la un punct material în CM, plus momentul de inerție propriu I_0, față de axa centrală paralelă cu cea dată*

$$I = MR_0^2 + I_0 \qquad (1.104)$$

unde R_0 este distanța CM pînă la axa dată.

Calculul momentului de inerție față de o axă oarecare se reduce, în virtutea teroemei lui Steiner, la calculul momentului de inerție față de o axă centrală, iar aceasta din urmă se reduce, în virtutea lui (1.102), la calculul celor 3 momente principale centrale de inerție. Dacă un corp omogen posedă o axă de simetrie, ea va fi axă principală centrală de inerție. Din tabel se obțin ușor cazurile particulare: placă subțire, tijă subțire, sferă plină, sferă goală, cilindru gol.

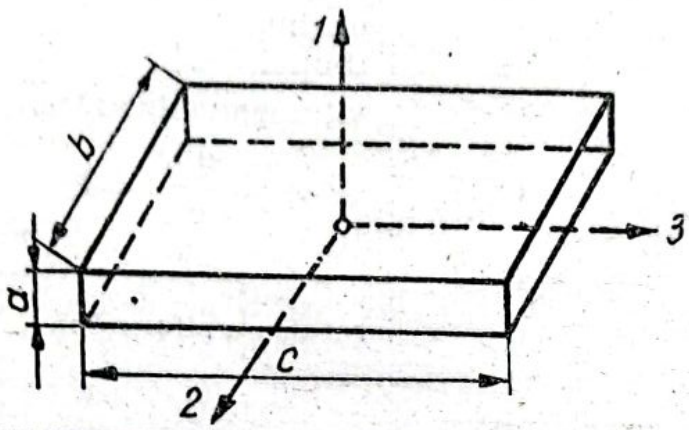
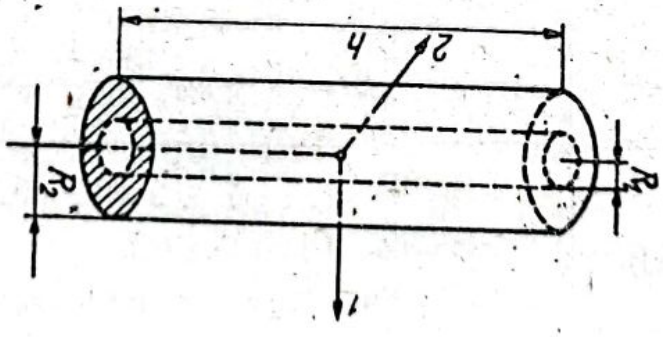
Legea inerției: Centrul de masă al unui rigid *izolat* este în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă (față de un reper inerțial) și în același timp rigidul se poate roti la nesfîrșit în mod uniform ($\vec{\omega}$ = const) în jurul unei axe principale centrale de inerție.

6. Pentru mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe, din (1.83) rezultă, proiectînd pe axa de rotație

$$M_{||} = J_{||} = I\dot{\omega} = I\varepsilon. \qquad (1.105)$$

Scanned with CamScanner

Momentele de inerție ale cîtorva corpuri

Corpul	Axele principale centrale de inerție	Momentele principale centrale de inerție
1. Paralelipiped		$I_1 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$ $I_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
2. Pătură sferică		$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$
3. Pătură cilindrică		$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3} l^2 \right)$ $I_3 = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$

Puterea și lucrul mecanic dezvoltate vor fi

$$P = \vec{M}\,\vec{\omega}, \quad W = \int \vec{M}\,\vec{\omega}\,dt = \int M_{\parallel}\,d\varphi,$$

$$\Delta E_{rot} = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = W \qquad (1.106)$$

Scanned with CamScanner

7. Analogia dintre translație și rotație

Mărimea sau ecuația	Unitatea	Mărimea sau ecuația	Unitatea
Cinematica			
coordonata x	m	unghiul θ	rad
timpul t	s	timpul t	s
viteza $\vec{v}$	m/s	viteza unghiulară $\vec{\omega}$	rad/s
$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$	m/s	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$	rad/s
mișcarea uniformă:		rotația uniformă:	
$x = x_0 + vt$		$\theta = \theta_0 + \omega t$	
accelerația $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	m/s²	accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$	rad/s²
$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$	m/s²	$\varepsilon = d\omega/dt = \dot{\omega}$	rad/s²
mișcarea uniform variată:		rotația uniform variată:	
$v = v_0 + at$		$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$		$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	
formula lui Galilei:		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0)$	
$v^2 = v_0 + 2a(x - x_0)$		$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$	
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)\, t$			
timpul și distanța până la oprire ($a < 0$):		timpul și unghiul descris până la oprire ($\varepsilon < 0$)	
$t_m = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\lvert a \rvert}$,		$t_m = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{\lvert \varepsilon \rvert}$,	
$x_m = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\lvert a \rvert}$		$\varphi_m = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega_0^2}{2\lvert \varepsilon \rvert}$	

Scanned with CamScanner

Mărimea sau ecuaţia	Unitatea	Mărimea sau ecuaţia	Unitatea

Numărul de rotaţii $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$.

Turaţia (în rot/s) sau frecvenţa de rotaţie $n\left[\dfrac{rot}{s}\right] = \dfrac{\omega}{2\pi} = \nu$.

D i n a m i c a

masa m	kg	momentele de inerţie I	$kg \cdot m^2$
forţa $\vec{F}$	N	momentul forţei $\vec{M}$	$N \cdot m$
impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$	$kg \cdot m/s$	momentul cinetic J	$J \cdot s$
$\vec{F} = \dfrac{\overrightarrow{dp}}{dt}$	N	$\vec{J}_{\parallel} = I\vec{\omega}$	
		$\vec{M} = \dfrac{d\vec{J}}{dt}$	$N \cdot m$
$F = \dfrac{d(mv)}{dt} = ma_t$	N		
		$M_{\parallel} = \dfrac{d(I\omega)}{dt} = I\varepsilon$	$N \cdot m$
Energia cinetică		Energia cinetică	
$E_c = \dfrac{1}{2} mv^2$	J	$E_c = \dfrac{1}{2} I\omega^2$	J
Puterea $P = \vec{F}\,\vec{v}$	W	Puterea $P = \vec{M}\,\vec{\omega}$	W

unde $\vec{M}$ este momentul forţelor aplicate în raport cu un punct de pe axă, deci $M_{\parallel}$ momentul în raport cu axa.

Dacă avem şi mişcare de translaţie, atunci în raport cu CM

$$\Delta(E_{tr} + E_{rot}) = \Delta\left(\frac{1}{2} Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2\right) =$$

$$= W_{tr} + W_{rot} = \int (\vec{F}\,\vec{v}_{CM} + \vec{M}\,\vec{\omega})\, dt \qquad (1.107)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forţelor aplicate.

Scanned with CamScanner

Dacă la un moment dat corpul în rotaţie în jurul unei axe fixe îşi schimbă (prin forţe interne) momentul său de inerţie faţă de axa de rotaţie şi *dacă momentul în raport cu axa al forţelor externe este nul*, atunci din (1.105) *rezultă conservarea momentului cinetic în raport cu axa de rotaţie*

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{const.} \qquad (1.108)$$

Energia cinetică nu se conservă în acest caz (ca la ciocniri neelastice)

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} I_2\omega_1^2(I_1/I_2 - 1) \neq 0. \qquad (1.109)$$

8. **Giroscopul** este un corp rigid care se roteşte cu turaţie mare în jurul axei sale principale centrale de inerţie cu moment de inerţie maxim. Datorită inerţiei sale la rotaţie, giroscopul tinde să păstreze *neschimbată* în spaţiu direcţia axei sale de rotaţie, de exemplu giroscopul în suspensie cardanică (fig. 1.22).

Giroscopul cu punct de sprijin al axei se roteşte stabil în jurul axei sale verticale (titirezul sau sfîrleaza). Înclinat fiind, nu cade, ci efectuează o mişcare de precesie în jurul verticalei.

Dacă asupra unui giroscop se aplică un cuplu de moment $\vec{M}$, giroscopul tinde să aşeze axa sa de rotaţie $\vec{\omega}$ paralel cu axa rotaţiei forţate (impuse) $\vec{M}$, dată de momentul forţelor aplicate.

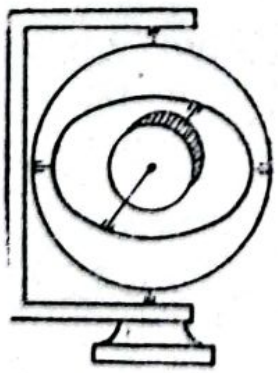


Fig. 1.22

Dacă frecvenţa unghiulară de precesie $\Omega \ll \omega$, rezultă

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{\Omega} \times I\vec{\omega}. \qquad (1.110)$$

Un corp, obligat să se rotească în jurul unei axe fixe, *diferite* de o axă principală centrală de inerţie, reacţionează asupra axei şi lagărelor cu forţe de reacţiune inerţială care depind în general de ω^2 şi de $\varepsilon = \dot{\omega}$ (fig. 1.23).

Scanned with CamScanner

Dacă axa de rotaţie este o axă principală centrală de inerţie, forţele centrifuge se echilibrează (momentele de inerţie centrifugale sînt nule) şi corpul se poate roti liber

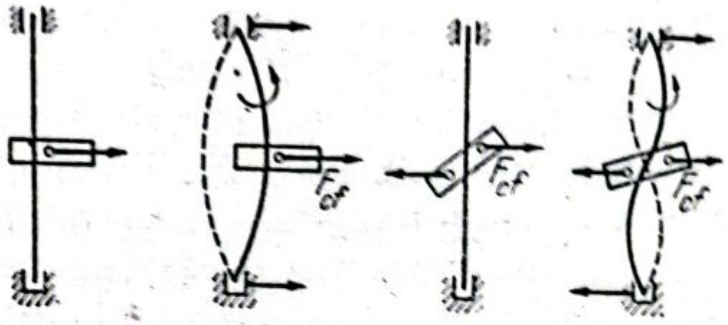


Fig. 1.23

în jurul axei verticale (fără lagărul superior), de aceea aceste axe se mai numesc axe *libere* sau *spontane* de rotaţie.

9. **Statica rigidului.** Pentru un solid rigid forţa este un vector *alunecător* (glisant). Se poate totuşi deplasa forţa *echipolent* pe alt suport dacă introducem un cuplu compensator avînd momentul egal cu momentul forţei iniţiale faţă de noul punct de aplicaţie al forţei deplasate.

Un *cuplu de forţe* este un sistem de două forţe paralele, egale în modul şi de sensuri opuse (fig. 1.24).

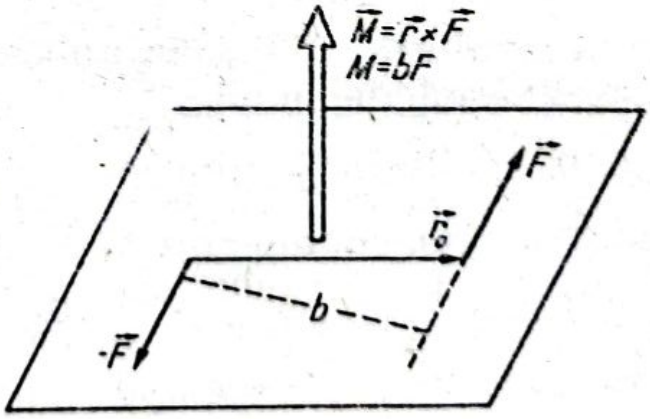


Fig. 1.24

Momentul cuplului este momentul rezultant al celor două forţe, el *nu* depinde de polul ales. Pentru rigide un cuplu de forţe este complet caracterizat de momentul său considerat vector *liber*. Mai multe cupluri aplicate unui

Scanned with CamScanner

rigid se compun într-un singur cuplu rezultant prin adunarea vectorială a momentelor lor, considerate vectori liberi.

Un sistem arbitrar de forțe $\vec{F}_s$, $s = 1,2,\ldots$, aplicate unui rigid se reduce în raport cu un anumit pol, la o rezultantă : $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_s$ aplicată în pol, și la un cuplu al cărui moment este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor față de pol : $\vec{M} = \Sigma\, \vec{r}_s \times \vec{F}_s$.

Prin deplasarea polului rezultanta se deplasează echipolent în noul pol, deci este un invariant ; de asemenea produsul scalar $\vec{F}\,\vec{M} = inv$, sau componenta longitudinală (paralelă cu $\vec{F}$) a momentului este un invariant.

Alegînd convenabil polul avem teorema :

Un sistem de forțe aplicate unui rigid se poate reduce la o rezultantă și un cuplu cu moment paralel cu rezultanta. In acest caz dreapta suport a rezultantei se numește *axa centrală* a sistemului de forțe.

În particular, în cazul unui sistem arbitrar de forțe în *plan* sau de forțe paralele în *spațiu*, sistemul se reduce fie la un cuplu, fie la o rezultantă situată pe axa centrală.

Condițiile de echilibru pentru un rigid sînt :

a) rezultanta forțelor aplicate trebuie să fie zero ;

$\Sigma \vec{F}_s = 0$ (echilibru la translație),

b) momentul rezultant al forțelor aplicate, față de un pol oarecare, trebuie să fie zero :

$\Sigma \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0$ (echilibru la rotație).

Față de un sistem de coordonate avem deci în general *șase* condiții universale de echilibru pentru un rigid : trei pentru rezultantă și trei pentru momentul rezultant.

În particular, în cazul forțelor situate într-un plan avem două condiții pentru rezultantă : $\Sigma F_{sx} = 0$, $\Sigma F_{sy} = 0$ și o condiție pentru momentul rezultant : $\Sigma M_{sz} = 0$.

În cazul forțelor paralele în spațiu avem o condiție pentru rezultantă : $\Sigma F_{sz} = 0$ și două condiții pentru momentul rezultant : $\Sigma M_{sx} = 0$, $\Sigma M_{sy} = 0$.

Scanned with CamScanner

1.7. Sistemele de referință neinerțiale

1. **Mișcarea absolută, relativă și de transport.** Mișcarea unui corp poate fi studiată din diferite repere. Unul din repere S se consideră prin convenție „fix" sau „absolut"; atunci al doilea reper S' va fi „mobil" (față de primul). Parametrii mișcării (traiectoria, viteza, accelerația) în reperul fix se numesc absoluți, iar în reperul mobil — relativi. Parametrii mișcării reperului mobil față de cel fix se numesc *de transport* (sau *de antrenare*).

2. În cadrul mecanicii clasice newtoniene se consideră că lungimile (distanțele) și duratele au caracter absolut, fiind aceleași în toate reperele. În baza acestei ipoteze se găsește ușor *legea de compunere a deplasărilor și a vitezelor*:

$$\Delta\vec{r}_{abs} = \Delta\vec{r}_{rel} + \Delta\vec{r}_{tr}, \quad \vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} \qquad (1.111)$$

unde $\vec{v}_{tr}$ este viteza de transport, adică viteza acelui punct-suport din S', legat rigid de S', deci mișcat solidar cu S', prin care trece în momentul considerat punctul material și este dată de (1.95).

3. Prin derivarea vitezelor din (1.111) în raport cu timpul, față de reperul S, obținem

$$\frac{d\vec{v}_{abs}}{dt} = \vec{a}_{abs}, \quad \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel},$$

$$\frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} = \vec{a}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \qquad (1.112)$$

unde $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară de rotație a reperului S', astfel încît găsim *legea de compunere a accelerațiilor*

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Cor}, \quad \vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \qquad (1.113)$$

unde $\vec{a}_{Cor}$ este accelerația lui Coriolis

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel},$$

$$a_{Cor} = 2\omega v_{rel} \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{rel}) = 2\omega v_{rel}^{\perp}; \qquad (1.114)$$

ea este nulă dacă S' nu se rotește ($\omega = 0$) sau $\vec{v}_{rel}$ este nulă sau paralelă cu axa de rotație.

Scanned with CamScanner

Acceleraţia de transport $\vec{a}_{tr}$ este acceleraţia acelui punct-suport din S', legat rigid de S', deci mişcat solidar cu S', prin care trece punctul material la momentul considerat şi este dată de (1.96).

Dacă reperele S, S' se mişcă unul faţă de altul rectiliniu uniform, rezultă $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel}$, deci *acceleraţia este aceeaşi faţă de întreaga clasă sau familie a reperelor aflate în translaţie uniformă unele faţă de altele* (de exemplu, faţă de clasa reperelor inerţiale). În particular, mişcarea rectilinie uniformă faţă de un reper va fi tot rectilinie uniformă faţă de oricare alt reper mişcat rectiliniu uniform faţă de primul, adică mişcarea rectilinie uniformă este invariantă la translaţiile uniforme ale reperului. Astfel, legea inerţiei, fiind valabilă faţă de un reper inerţial dat, este valabilă în întreaga clasă a reperelor inerţiale, care se mişcă rectiliniu uniform unele faţă de altele, dar nu este valabilă în reperele accelerate faţă de cele inerţiale.

4. **Legea fundamentală** a mecanicii (legea a doua a lui Newton) $\vec{F} = m\vec{a}$, la fel ca şi legea inerţiei, nu este valabilă în reperele neinerţiale. În adevăr, dacă S este reper inerţial, iar S' se mişcă accelerat faţă de S, deci este neinerţial avem

$$\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = m\vec{a}_{rel} + m\vec{a}_{tr} + m\vec{a}_{Cor}, \text{ deci } \vec{F} \neq m\vec{a}_{rel}.$$

Pentru a putea scrie în S' legea: „Forţa este egală cu masa ori acceleraţia", trebuie să adăugăm la forţa reală dată $\vec{F}$ o *forţă complementară* (numită şi pseudoforţă sau forţă de inerţie)

$$\vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}_{rel}, \quad \vec{F}_c = -m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}, \quad \vec{F}_{Cor} = -m\vec{a}_{Cor} \qquad (1.115)$$

unde $\vec{F}_{tr}$ este forţa complementară de transport şi $\vec{F}_{Cor}$ este forţa complementară Coriolis. Aceste forţe complementare au caracter fictiv în mecanica newtoniană: nu putem indica corpul care le-ar exercita, de aceea nici principiul III al acţiunii şi reacţiunii nu se aplică acestor forţe. Nu trebuie să confundăm forţele complementare cu *forţele de inerţie în sensul lui Newton*, adică cu

Scanned with CamScanner

forțele de reacțiune, *reale*, pe care un corp accelerat (față de repere inerțiale) le exercită asupra *celorlalte* corpuri (sau „legături") care-l accelerează, drept reacțiune, în virtutea inerției sale, conform principiului III. Forțele complementare se consideră aplicate *corpului însuși*.

Dacă față de reperul S' particula se mișcă rectiliniu uniform ($a_{rel} = 0$), forța complementară va fi $\vec{F}_c = -\vec{F}$, deci este echipolentă cu forța de inerție newtoniană ($\vec{F}' = -\vec{F}$) exercitată de corp asupra legăturilor.

În consecință, *putem scrie legea fundamentală a mecanicii în orice reper neinerțial cu condiția ca la forțele reale să adăugăm forțele complementare.*

Pentru observatorul neinerțial din S' forțele complementare *apar ca forțe reale*, indiscernabile *în cadrul restrîns* al laboratorului său de forțele gravitaționale (principiul echivalenței), fiind aplicate fiecărui punct material și proporționale cu masa sa, exact ca și forțele gravitaționale.

În teoria generală a relativității sau a gravitației (A. Einstein, 1916) se face o analiză mai adîncă a forțelor gravitaționale și a forțelor de inerție (a gravitației și inerției), ținînd seama de ansamblul stelelor și nebuloaselor care determină clasa reperelor inerțiale.

5. **Rotația Pămîntului.** Pămîntul nu este un reper riguros inerțial, din cauza rotației sale diurne față de stele cu viteza unghiulară $\omega = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Studiind mișcarea corpurilor față de Pămînt trebuie să introducem forțele complementare: forța de transport centrifugă $F_{tr} \neq F_{cf} = m\omega^2 R \cos\varphi$, unde φ este latitudinea și $R \approx$ ≈ 6380 km raza Pămîntului, și forța Coriolis, dacă $v'_{rel} \neq 0$, adică dacă corpul se depărtează de axa de rotație S-N a Pămîntului.

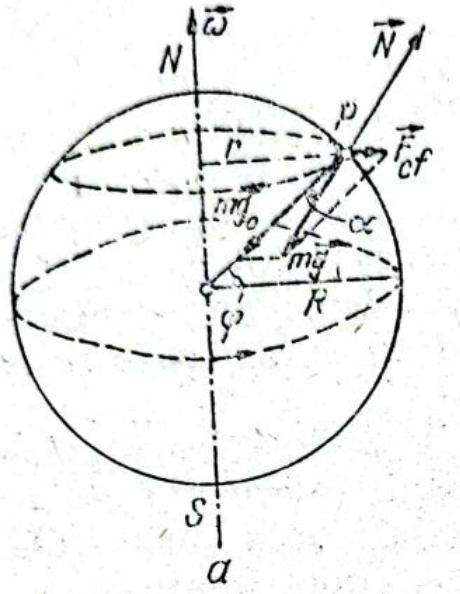
a) *Direcția firului cu plumb* nu trece prin centrul Pămîntului (fig. 1.25, *a*). Greutatea aparentă și deviația ei față de raza terestră sînt

$$mg \approx mg_0 - \omega^2 R \cos^2\varphi,$$

$$\alpha^{(rad)} \approx \frac{R}{2g} \omega^2 \sin 2\varphi. \qquad (1.116)$$

Scanned with CamScanner

Componenta verticală a forţei centrifuge $\vec{F}_{cf}$ explică deci micşorarea greutăţii corpurilor datorită rotaţiei Pământului, iar componenta orizontală, îndreptată spre ecuator, explică deplasarea maselor spre ecuator şi turtirea Pământului la Poli.



b) Un corp lăsat liber nu cade în direcţia greutăţii aparente (a firului cu plumb), ci este *deviat spre răsărit.* Aceasta se explică prin apariţia forţei Coriolis ($v^{\perp}_{rel} \neq 0$), orientată spre răsărit. Deviaţia la momentul t şi deviaţia totală (h—înălţimea de cădere) sînt

$$x = \frac{g}{3} t^3 \omega \cos \varphi,$$

$$x_m = \frac{2}{3} h \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos\varphi. \quad (1.117)$$

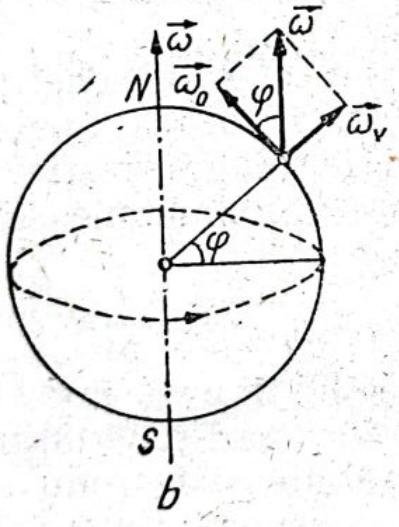


Fig. 1.25

c) Planul de oscilaţie al unui pendul se roteşte faţă de Pământ (*pendulul Foucault*), sub acţiunea forţei Coriolis care deviază permanent corpul spre dreapta. În realitate (faţă de observatorul Solar inerţial) podeaua laboratorului se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_v = \omega \sin\varphi$ (fig. 1.25 b), deci cu perioada

$$T_v = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{T}{\sin \varphi}, \quad T = 24 \text{ h}. \quad (1.118)$$

Cealaltă componentă, orizontală, a vitezei unghiulare, $\omega_0 = \omega \cos \varphi$, roteşte planul meridian şi explică devierea corpurilor spre răsărit în căderea liberă.

d) Tot prin forţa Coriolis se explică faptul că rîurile din emisfera nordică sapă mai pronunţat malul drept

Scanned with CamScanner

(rîurile siberiene; *legea lui Bär*), precum și uzajul șinei drepte la căile ferate duble.

Pentru observatorul solar inerțial nu există forțele complementare, de exemplu eroziunea malului drept se explică prin fapul că apa curgînd spre Nord se apropie de axa de rotație a Pămîntului, deci vine cu un surplus (exces) de viteză spre răsărit (de la viteza liniară tangențială a Pămîntului) și lovește malul răsăritean (în emisfera nordică) etc.

Efectele de mai sus reprezintă o dovadă „locală" a rotației diurne a Pămîntului.

1.8. Elasticitate

Deformațiile care dispar după suprimarea forțelor care le-au produs se numesc *elastice*; cele care nu dispar — *plastice*.

Vom considera numai corpurile *omogene* (aceleași proprietăți fizice în toate punctele corpului) și *izotrope* (aceleași proprietăți fizice în toate direcțiile). Astfel sînt materialele policristaline (de exemplu, metalele), formate din microcristale orientate haotic.

Deformațiile elastice se împart în 4 categorii:
1) întinderea (tracțiunea) sau comprimarea (compresiunea), 2) forfecarea (lunecarea), 3) încovoierea (flexiunea), 4) torsiunea (răsucirea).

1. **Intinderea barei.** În fig. 1.26 este reprezentată tensiunea elastică (efortul unitar) $\sigma = F/S_0$ (S_0 — secțiunea inițială) în funcție de deformație (alungire relativă) $\varepsilon = \Delta l/l_0$ (l_0-lungimea inițială). Pe porțiunea liniară OP (P — limita de proporționalitate) este valabilă *legea lui Hooke*

$$\sigma = E\varepsilon \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0}, \quad [E] = \text{N/m}^2, \qquad (1.119)$$

unde E este modulul de elasticitate (modulul lui Young). Pentru metale: $E \sim 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2. După limita de elas-

Scanned with CamScanner

ticitate (punctul E în fig. 1.26) începe domeniul deformaţiilor plastice. Punctul critic S reprezintă limita de curgere (fluiditate), punctul B este limita de rezistenţă, punctul Z — ruperea barei.

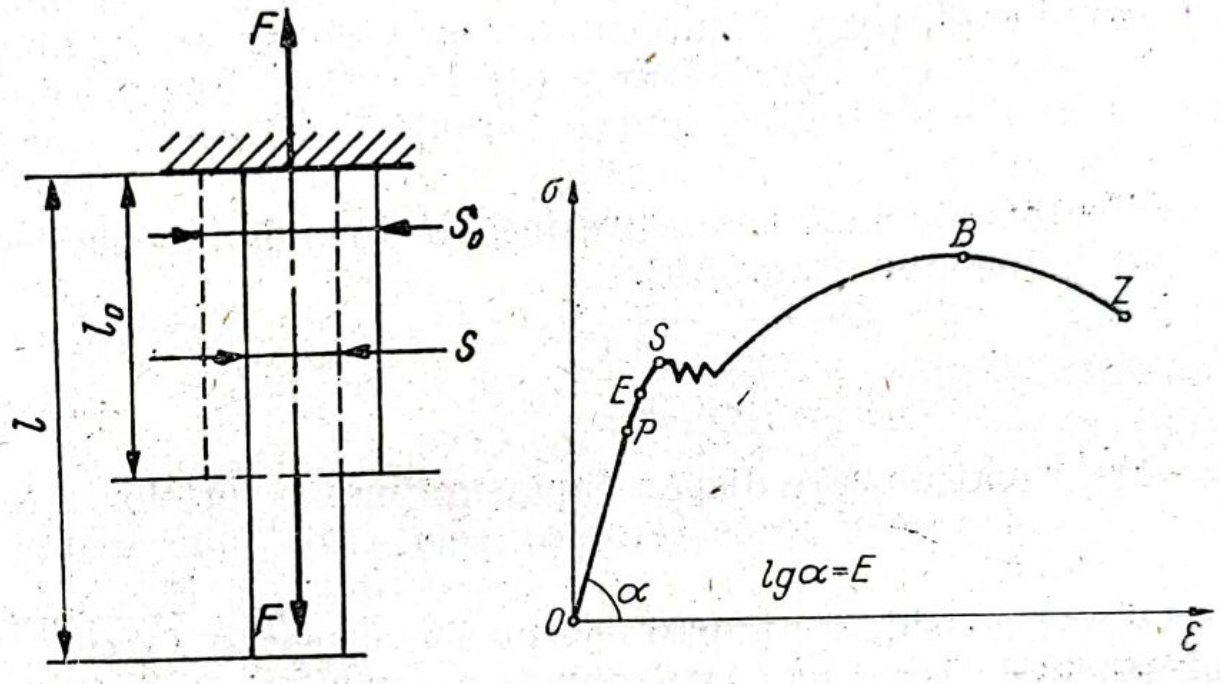


Fig. 1.23

În timpul întinderii, dimensiunile transversale se micşorează în raportul

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu\varepsilon \qquad (1.120)$$

unde μ este coeficientul de contracţie transversală al lui Poisson. Pentru metale $\mu \sim 0{,}3$.

Lucrul mecanic efectuat pentru deformare sau energia potenţială de deformare, pe unitatea de volum, în domeniul elastic, este

$$\frac{W}{V_0} = w = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon\sigma = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}. \qquad (1.121)$$

Întinderea sau comprimarea dau deformaţii omogene : toate fibrele barei sînt alungite identic. În cazul *încovoierii* avem deformaţii *neomogene* : fibrele interioare (spre con-

Scanned with CamScanner

cavitate) sînt comprimate, iar cele exterioare (spre convexitate) sînt întinse și există fibre neutre, neîntinse.

2. **Comprimarea pe toate fețele** (fig. 1.27) dă o deformație a volumului

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z =$$

$$= \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \qquad (1.122)$$

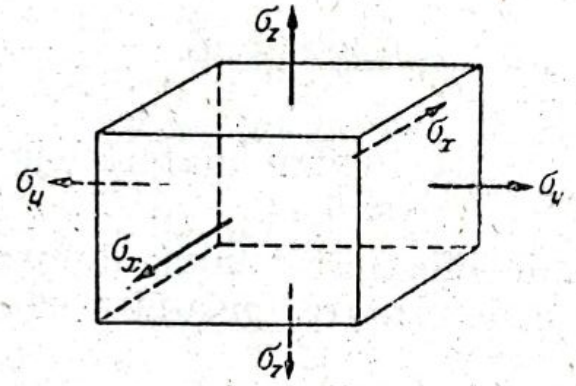


Fig. 1.27

În cazul comprimării uniforme, de tip hidrostatic, datorită unei presiuni Δp, rezultă

$$\varepsilon_V = -3 \frac{1 - 2\mu}{E} \Delta p = -\beta \Delta p \qquad (1.123)$$

unde β este coeficientul de compresibilitate

$$\beta = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} = \frac{1}{K}, \qquad (1.124)$$

K fiind *modulul* de compresibilitate.

Energia potențială de deformare elastică pe unitatea de volum

$$\frac{W}{V_0} = w = \frac{(\Delta p)^2}{2K} = \frac{1}{2\beta} \varepsilon_V^2 = \frac{1}{2} K \varepsilon_V^2. \qquad (1.125)$$

2. **Forfecarea** (sau lunecarea) este deformarea în care unele straturi lunecă peste altele, fără variație de volum

Scanned with CamScanner

(fig. 1.28). Pentru deformaţii mici este valabilă legea lui Hooke

$$\tau = \frac{F}{S_0} = G\gamma, \quad [G] = \mathrm{N/m^2}, \tag{1.126}$$

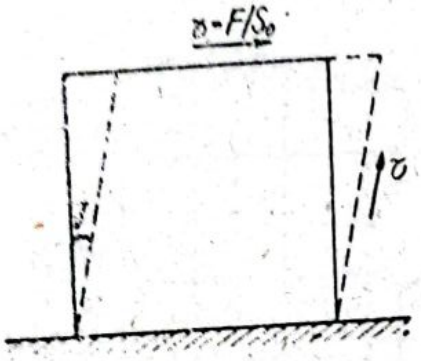


Fig. 1.28

unde τ este efortul elastic tangenţial, γ — unghiul de lunecare şi G — modulul de lunecare sau forfecare, legat de E şi μ prin relaţia

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{1.127}$$

Pentru materialele obişnuite $G \approx \approx 0{,}4E$.

Lucrul mecanic efectuat pentru deformare sau energia potenţială de deformare, pe unitatea de volum, este

$$\frac{W}{V_0} = w = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}. \tag{1.128}$$

3. **Încovoierea** (flexiunea). Vom considera încovoierea barelor subţiri, presupunînd că deformaţiile sînt mici (legea Hooke), forţele sînt verticale în planul de simetrie vertical, longitudinal, al barei. Atunci în orice secţiune a barei forţele interne se reduc la o *forţă transversală sau tăietoare* Q şi la un *moment* sau cuplu încovoietor M (fig. 1.29), care reprezintă, respectiv, rezultanta şi momentul

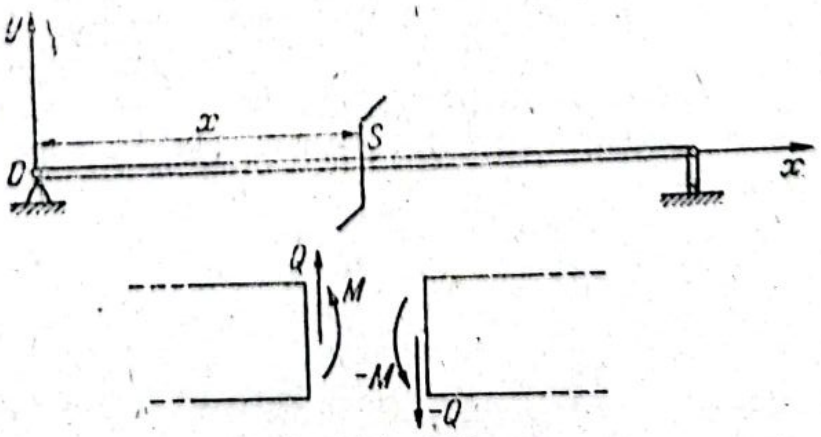


Fig. 1.29

rezultant față de centrul secțiunii al forțelor *externe* aplicate părții *drepte* a barei (sau *minus* rezultanta și *minus* momentul rezultant al forțelor externe aplicate părții *stîngi* a barei).

Prin încovoierea barei fibrele longitudinale de partea convexă se alungesc iar cele de partea concavă se contractă. Există un *strat neutru* de fibre care nu-și schimbă lungimea, intersecția sa cu planul secțiunii transversale dă *axa neutră* (Oz) (fig. 1.30). Secțiunile transversale

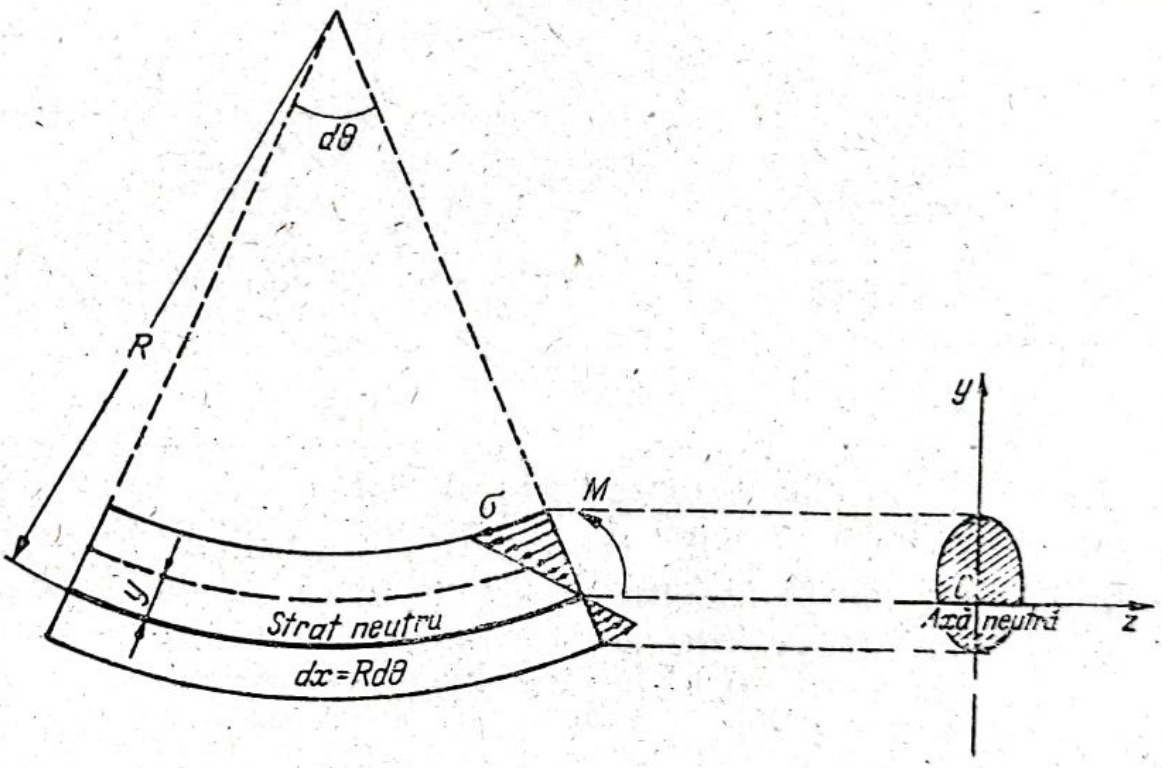


Fig. 1.30

plane înainte de deformație, rămîn plane și după deformație, ele doar se rotesc în jurul axei neutre rămînînd perpendiculare pe stratul neutru (ipoteza lui Bernoulli).

Deformațiile fibrelor și *tensiunile* elastice sînt direct proporționale cu distanțele lor pînă la stratul neutru (R — raza de curbură a stratului neutru):

$$\varepsilon(y) = -\frac{y}{R}, \quad \sigma(y) = E\varepsilon = -E\frac{y}{R}. \qquad (1.129)$$

Axa neutră trece prin „centrul de greutate" al secțiunii transversale.

Scanned with CamScanner

Ecuația momentului încovoietor sau a liniei elastice $y = f(x)$ (a axei barei):

$$M = \frac{EJ}{M} = EJ\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\quad J = \int y^2\mathrm{d}S,\ [J] = \mathrm{m}^4, \qquad (1.130)$$

unde J este *momentul de inerție geometric al secțiunii* față de axa neutră (fig. 1.31).

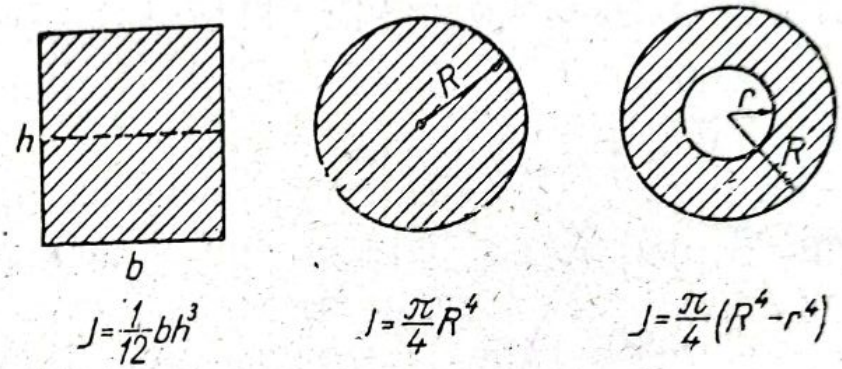


Fig. 1.31

Exemple. a) Bară orizontală incastrată la un capăt și cu o sarcină verticală P la celălalt capăt (fig. 1.32). Ecuația axei barei și săgeata f:

$$EJy = \frac{1}{2}Px^2\left(\frac{x}{3} - l\right),\quad f = \frac{Pl^3}{3EJ}. \qquad (1.131)$$

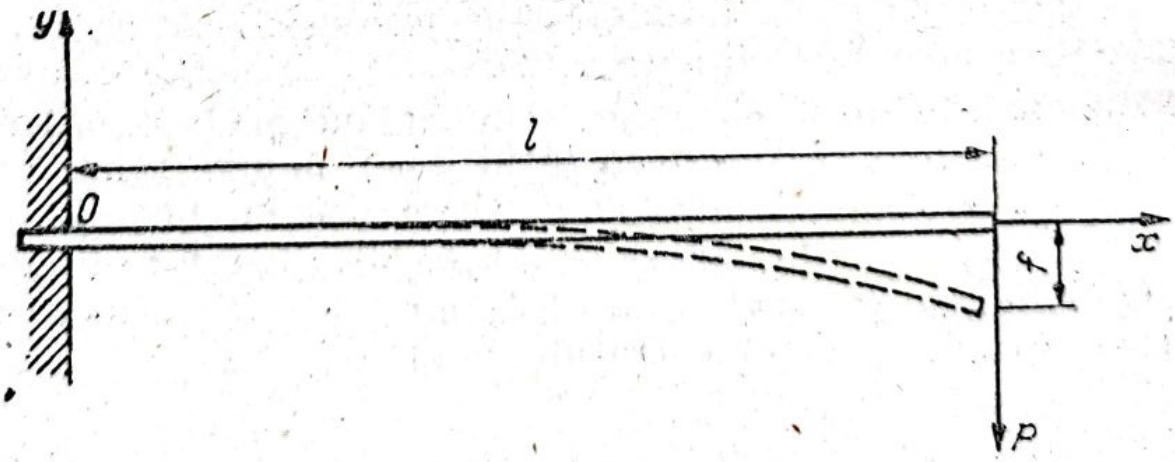


Fig. 1.32

b) Bară orizontală sprijinită la capete și cu o sarcină verticală la mijloc (fig. 1.33). Ecuația axei barei și să-

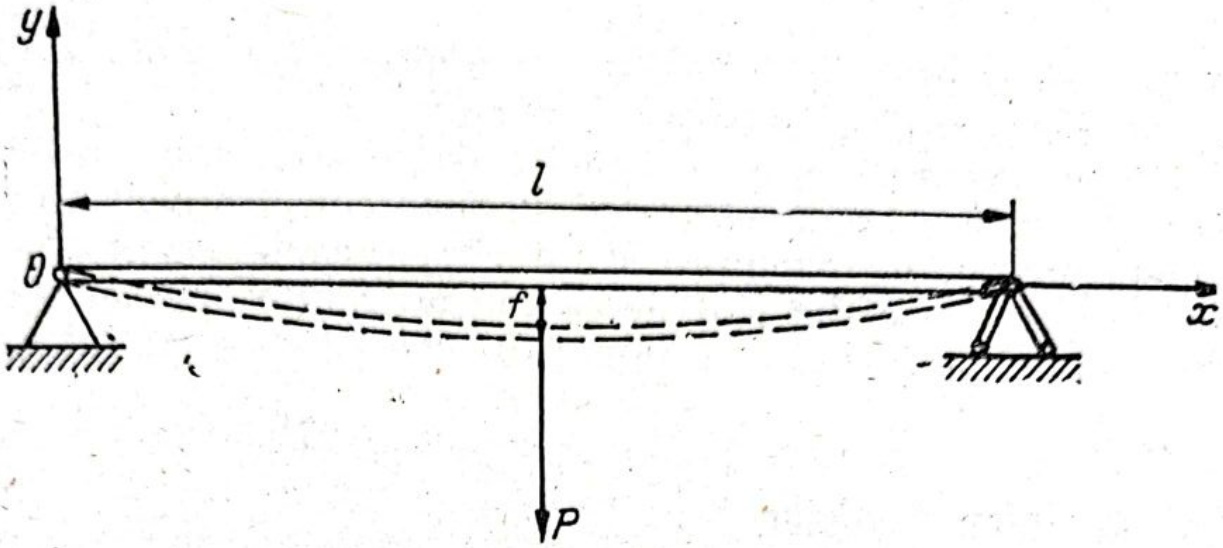


Fig. 1.33

geata :

$$EJy = \frac{1}{4} Px\left(\frac{x^2}{3} - \frac{l^2}{4}\right), \quad x \leqslant \frac{l}{2};$$

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}. \tag{1.132}$$

4. **Torsiunea** sau răsucirea unui fir sau a unei tije rotunde este o lunecare neomogenă (fig. 1.34). Momentul M al forţelor de răsucire, aplicate bazei superioare este proporţional cu unghiul de răsucire θ (în radiani)

$$M = C\theta, \quad [C] = \text{N} \cdot \text{m/rad} \tag{1.133}$$

unde C este modulul de torsiune, (momentul director), legat de modulul G prin relaţia

$$C = \frac{\pi}{2l} GR^4. \tag{1.134}$$

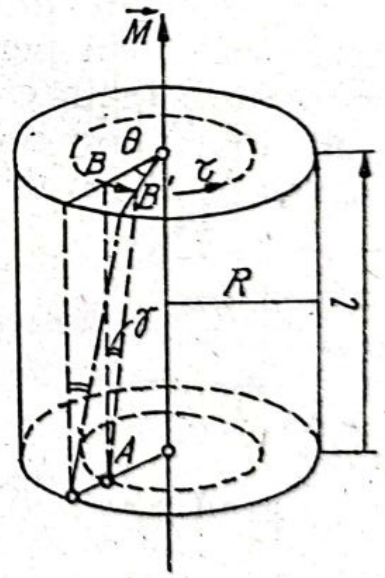


Fig. 1.34

Lucrul mecanic de răsucire sau energia potenţială de deformare

$$\frac{W}{V_0} = w = \frac{1}{2} C\theta^2 = \frac{1}{2} M\theta = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C}. \tag{1.135}$$

Scanned with CamScanner

Torsiunea unui fir este folosită în multe aparate de măsură (de exemplu, balanţa de torsiune).

Prin urmare, proprietăţile elastice ale unui solid *izotrop* sînt caracterizate numai de *două* constante elastice independente, de exemplu E şi G. În cazul corpurilor *anizotrope* (cristalele) sînt necesare mai multe constante: de la 3 la cristalele cubice, pînă la 21 la cristalele triclinice.

1.9. Mecanica fluidelor

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea distribuţiei presiunilor şi vitezelor într-un fluid.

1. Hidrostatica

Într-un fluid în repaus presiunea este *izotropă*: pe fiecare element de suprafaţă în interiorul fluidului se exercită o forţă perpendiculară pe suprafaţă şi independentă de orientarea elementului de suprafaţă.

a) *Presiunea hidrostatică* exercitată de o pătură sau coloană de fluid, datorită greutăţii sale, este

$$p = \rho g h \tag{1.136}$$

unde ρ este densitatea fluidului, h înălţimea coloanei de fluid, g acceleraţia gravitaţională (9,8 m/s²). Mai general,

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \rho\vec{g}. \tag{1.126}$$

Unităţi tolerate de presiune:

1 torr = 1 mm Hg = 133,322 N/m²,

1 atm = 760 torr = 101325 N/m² = 1,03323 at,

1 at = 1 kgf/cm² = 98066,5 N/m²,

1 barye = 1 dyn/cm² = 0,1 N/m²,

1 bar = 10^6 barye = 10^5 N/m²,

1 mm H_2O = 9,8 N/m² = 13,6 torr.

Scanned with CamScanner

b) *Legea lui Pascal*: Presiunea exercitată din exterior pe suprafaţa unui lichid incompresibil se transmite cu aceeaşi intensitate în toate direcţiile în lichid.

c) *Legea lui Arhimede*: Un corp cufundat într-un fluid este împins de jos în sus cu o forţă egală cu greutatea volumului de fluid dislocuit de corp.

Greutatea aparentă a corpului cufundat în fluid

$$G_{ap} = mg(1 - \rho_{fluid}/\rho_{corp}),\ F_A = mg\,\rho_{fluid}/\rho_{corp}. \quad (1.137)$$

2. Hidrodinamica

a) *Liniile de curent* sînt acele linii de-a lungul cărora vectorul viteză este tangent la linie; ele reprezintă traiectoriile particulelor de fluid în regim staţionar.

Tubul de curent este format din liniile de curent care trec prin punctele unui contur închis.

Curgerea este *staţionară* sau în regim permanent dacă viteza şi presiunea nu depind de timp; atunci liniile de curent sînt fixe.

b) *Densitatea curentului* (sau fluxului) de fluid, $\rho\vec{v}$, reprezintă masa de fluid care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă aşezată perpendicular pe direcţia curentului. Dacă reprezentăm elementul de suprafaţă printr-un vector $d\vec{S}$, de modul dS, orientat perpendicular pe elementul de suprafaţă (fig. 1.35), atunci masa dm care trece prin $d\vec{S}$ în timpul dt va fi

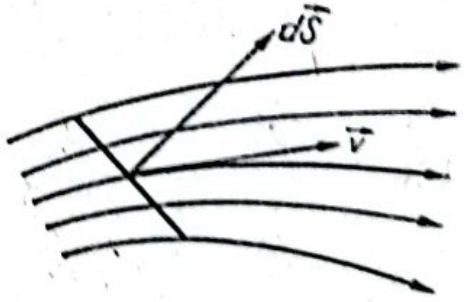


Fig. 1.35

$$dm = \rho\vec{v}\,d\vec{S}\,dt. \quad (1.138)$$

c) *Ecuaţia de continuitate* sub formă diferenţială

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0 \quad (1.139)$$

Scanned with CamScanner

unde divergența unui vector înseamnă scalarul

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.139')$$

În regim *staționar* rezultă de aici că debitul masic este același în orice secțiune a unui tub de curent (fig. 1.36)

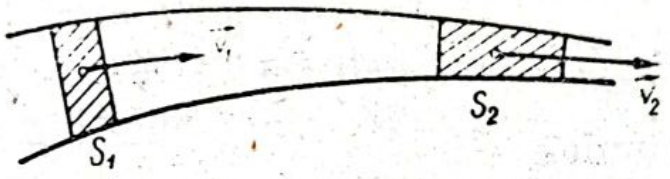


Fig. 1.36

$$Q_m = \int_S \rho \vec{v}\, d\vec{S} = \text{const sau } Q_m = \overline{\rho v} S = \text{const} \qquad (1.140)$$

unde media (bara deasupra literei) se ia pe secțiunea S a tubului de curent.

Pentru un lichid *incompresibil* ($\rho = \text{const}$) rezultă că atît debitul masic cît și cel volumic sînt constante de-a lungul tubului de curent

$$Q_v = \int_S \vec{v}\, d\vec{S} = \text{const sau } Q_v = \overline{v} S = \text{const.} \qquad (1.141)$$

Se numește *fluid ideal* sau perfect un fluid incompresibil și lipsit de vîscozitate. Lichidele și gazele, la viteze de

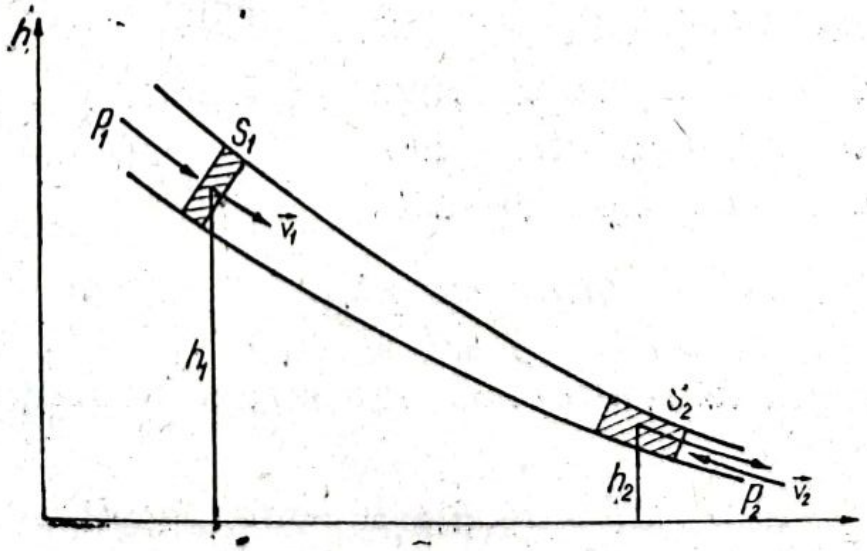


Fig. 1.37

curgere mult mai mici decît viteza sunetului se comportă aproximativ ca fluide ideale.

d) *Ecuația lui Bernoulli.* De-a lungul unei linii de curent într-un fluid ideal avem (fig. 1.37)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const.} \qquad (1.142)$$

Presiunea statică p se exercită asupra unui element de suprafață așezat paralel cu liniile de curent, de exemplu pe pereții tubului, sau asupra unui element orientat arbitrar dar mișcat solidar cu fluidul. Presiunea statică se măsoară cu sondele de presiune (fig. 1.38). Termenul $\frac{1}{2}\rho v^2 = p_d$ reprezintă presiunea dinamică, datorită energiei cinetice a fluidului (pe unitatea de volum), iar $\rho g h$ reprezintă presiunea de „poziție" datorită energiei potențiale (pe unitatea de volum). Presiunea totală se exercită asupra unui element de suprafață așezat perpendicular pe liniile de curent și se măsoară cu tubul Pitot. Presiunea dinamică se măsoară cu tubul Prandtl (fig. 1.38).

În porțiunile înguste ale tubului viteza fluidului crește (debitul fiind constant), deci crește presiunea dinamică, de aceea scade presiunea statică (pe pereți) (presiunea

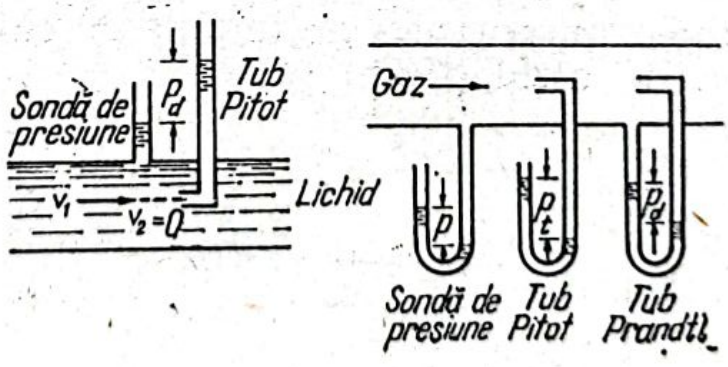


Fig. 1.38

totală fiind constantă), uneori chiar sub presiunea atmosferică, apărînd fenomenul de aspirație, pe care se bazează unele aplicații tehnice: pulverizatorul, trompa de apă, lampa Bunsen etc.

Scanned with CamScanner

e) *Formula lui Torricelli* dă viteza de scurgere a unui lichid printr-un orificiu mic (fig. 1.39)

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-S^2/S'^2}} \approx \sqrt{2gh}, \quad (S \ll S'). \tag{1.143}$$

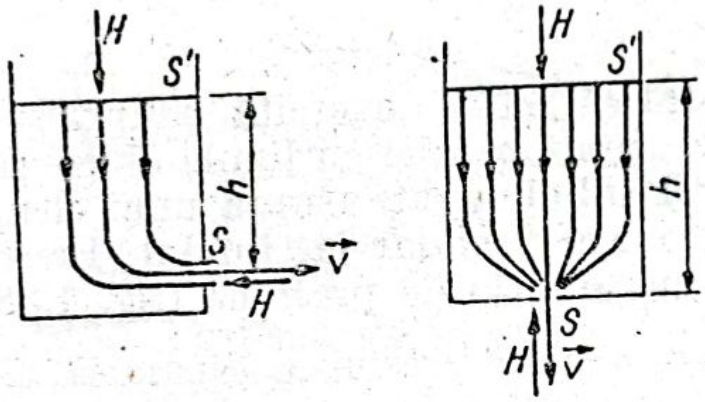


Fig. 1.39

La viteze nu prea mari curgerea fluidelor este *laminară* sau lamelară, adică în straturi paralele. La viteze mari curgerea devine *turbulentă*, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează vîrtejuri.

3. **Viscozitatea** constă în apariția unor *forțe de frecare internă* între straturile de fluid care lunecă unele peste altele, datorită transportului de impuls de către molecule dintr-un strat în altul (fig. 1.40).

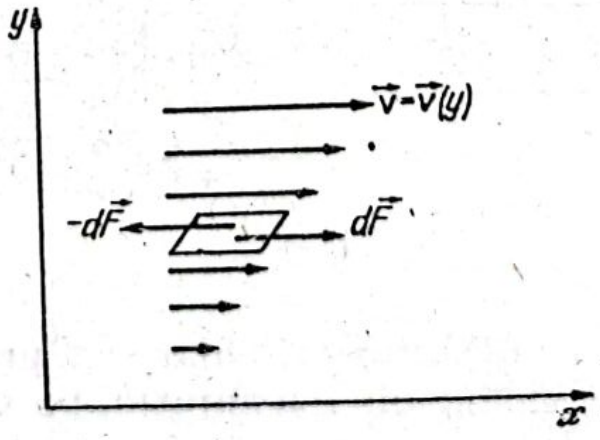


Fig. 1.40

a) *Legea lui Newton*

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dy}, \quad [\eta] = \text{kg/(m} \cdot \text{s)} = \text{daP} \qquad (1.144)$$

unde η este coeficientul de vîscozitate (dinamică) dependent de natura fluidului și de temperatură; se măsoară în decapoise (1 P = 1 g/(cm ·s), după numele lui Poiseuille). La lichide $\eta \sim 10^{-3}$ daP și scade sensibil cu creșterea temperaturii. La gaze $\eta \sim 10^{-5}$ daP și crește cu temperatura ca $\sqrt{T}$.

Vîscozitatea *cinematică* este raportul $\nu = \eta/\rho$, $[\nu] = m^2/s$ (unitatea CGS este stokes : 1St = 1 $cm^2/s = 10^{-4}$ m^2/s). La lichide $\nu \sim 10^{-6}$ m^2/s, la gaze $\nu \sim 10^{-5}$ m^2/s.

b) În cazul curgerii *laminare staționare* a unui fluid *vîscos* printr-un tub, distribuția vitezelor pe secțiunea tubului (fig. 1.41) este dată de *legea lui Poiseuille*

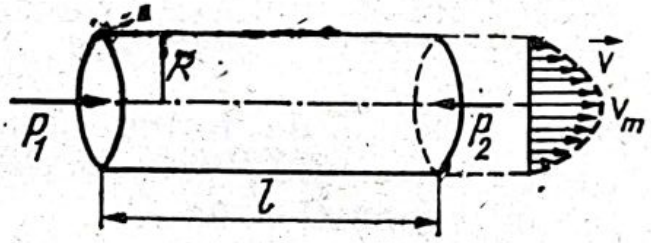


Fig.1.41

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2) = v_m(1 - r^2/R^2) \qquad (1.145)$$

iar debitul volumic este dat de *formula lui Poiseuille*

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8l\eta} R^4 = S\bar{v}, \quad \bar{v} = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} R^2 \qquad (1.146)$$

($\bar{v}$ — viteza medie).

c) *Forța de rezistență* (de frecare) întîmpinată de un corp din partea unui fluid, în regim *laminar* de curgere, este proporțională cu vîscozitatea fluidului, cu viteza corpului (sau a fluidului) și cu o dimensiune liniară caracteristică a corpului

$$F = \text{const. } \eta l v \text{ (legea lui Stokes).} \qquad (1.147)$$

Scanned with CamScanner

În cazul *sferei* se obţine *formula lui Stokes*

$$F = 6\pi\eta r v \quad (r - \text{raza sferei}). \tag{1.148}$$

d) *Efectul Magnus* constă în apariţia unei forţe, transversale pe direcţia de curgere laminară a fluidului, exercitată asupra unui cilindru care se roteşte şi orientată spre partea unde viteza fluidului este mărită (fig. 1.42).

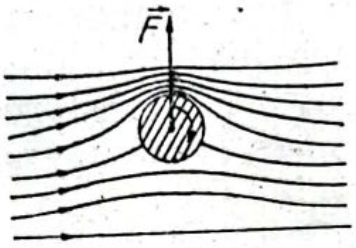


Fig. 1.42

e) *Forţa de rezistenţă* întîmpinată de un corp din partea unui fluid, în regim *turbulent* de curgere, este proporţională cu densitatea fluidului, cu viteza corpului (sau a fluidului) la pătrat şi cu aria secţiunii transversale a corpului

$$F = \frac{1}{2} CS\rho v^2 \text{ (formula lui Newton)}, \tag{1.149}$$

unde constanta C depinde de forma (aerodinamică) a corpului. Pentru disc $C = 1{,}32$; pentru sferă $C = 0{,}24$; pentru profilul aerodinamic $C = 0{,}04$.

f) Trecerea de la regim laminar la cel turbulent are loc pentru anumite valori ale *numărului lui Reynolds* (1883):

$$\mathrm{Re} = \frac{l\rho v}{\eta} = \frac{lv}{\nu}. \tag{1.150}$$

Astfel, pentru conducte tubulare cu pereţi netezi, această valoare este

$$\mathrm{Re} = \frac{Dv}{\nu} \approx 2300 \ (D - \text{diametru}) \tag{1.150'}$$

deci regimul turbulent apare la viteze mari sau la diametre mari.

g) În cazul curgerii *turbulente* printr-un tub, distribuţia vitezelor (medii în timp) pe secţiunea tubului nu

Scanned with CamScanner

mai este parabolică, ci mai complicată (fig. 1.43)

$$v(r) = v_m[1 - (r/R)^7]. \qquad (1.151)$$

La viteze de ordinul vitezei sunetului, forța de rezistență este proporțională aproximativ cu *cubul* vitezei, pentru ca la viteze supersonice să devină din nou proporțională cu pătratul vitezei.

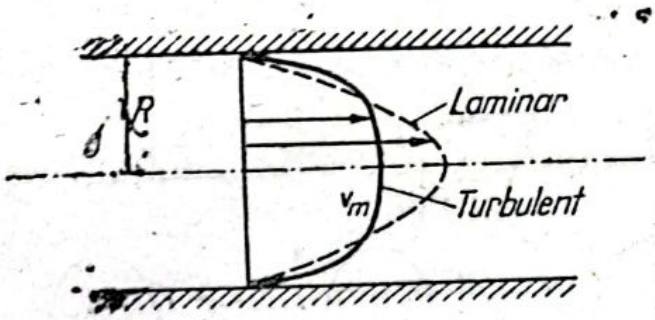


Fig. 1.43

1.10. Oscilații mecanice

1. **Oscilațiile sinusoidale** (armonice) sînt descrise de ecuația

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad -A \leqslant x \leqslant A. \qquad (1.152)$$

unde x este elongația, A — amplitudinea (elongația maximă), $\omega t + \alpha$ — faza mișcării, α — faza inițială. Viteza și accelerația particulei

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= \omega A \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v_m = \omega A, \quad -\omega A \leqslant v \leqslant \omega A; \qquad (1.153)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) =$$

$$= -\omega^2 x = \omega^2 A\cos(\omega t + \alpha + \pi),$$

$$a_m = \omega^2 A, \quad -\omega^2 A \leqslant a \leqslant \omega^2 A.$$

Scanned with CamScanner

Viteza este defazată înainte cu $\pi/2$ (sau $T/4$) faţă de elongaţie, iar acceleraţia cu π (sau $T/2$) (în opoziţie de fază) (fig. 1.44).

Forţa

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx,$$

$$k = m\omega^2,\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\omega = \sqrt{k/m},\quad T = 2\pi\sqrt{m/k}, \tag{1.154}$$

unde k este constanta cuasielastică (constanta forţei).

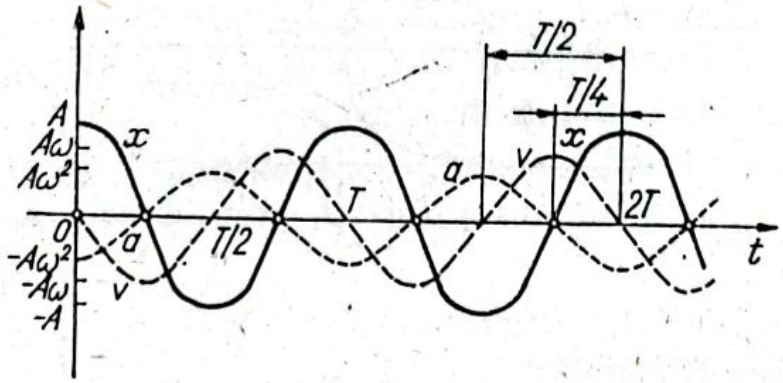


Fig. 1.44

Energia cinetică şi potenţială

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha),$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \tag{1.155}$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \text{const.}$$

$$\bar{E}_c = \bar{E}_p = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{E}{2}$$

Scanned with CamScanner

Energia potenţială se reprezintă printr-o parabolă (fig. 1.45).

2. **Exemple.** a) *Greutatea pe resort* efectuează oscilaţii verticale armonice cu perioada $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, cît timp $F \sim x$.

b) *Pendulul simplu* este un corp de dimensiuni neglijabile suspendat printr-un fir inextensibil de masă

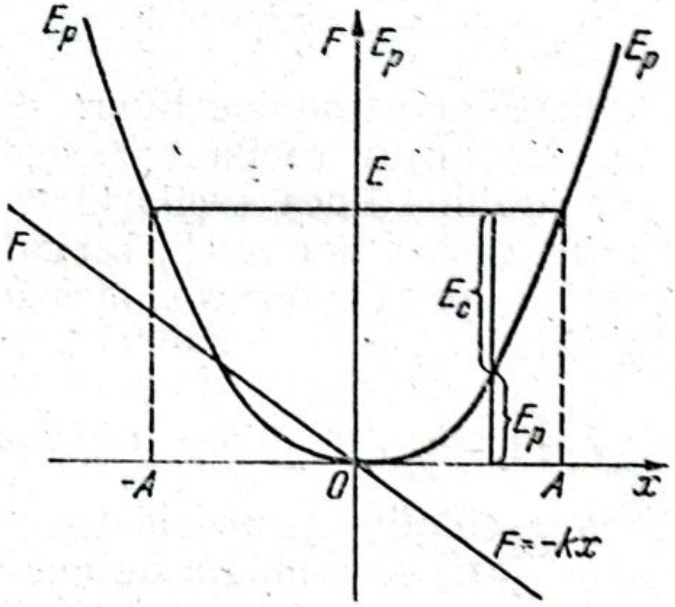


Fig. 1.45

neglijabilă, care oscilează într-un plan vertical sub acţiunea forţei de greutate. Pentru amplitudini de oscilaţie mici ($< 4 \div 6°$) oscilaţiile sînt armonice, cu perioada

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{1.156}$$

c) *Pendulul fizic* este un corp rigid care poate oscila sub acţiunea forţei de greutate în jurul unei axe orizontale de suspensie. Oscilaţiile mici sînt armonice, cu perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \tag{1.157}$$

$$l_r = \frac{I}{md} = d + \frac{I_0}{md} > d$$

Scanned with CamScanner

unde I este momentul de inerţie al corpului faţă de axa de suspensie, iar I_0 faţă de o axă centrală paralelă, d distanţa centrului de greutate pînă al axa de suspensie, l_r *lungimea redusă*, adică lungimea unui pendul simplu, sincron cu cel fizic.

d) *Pendulul de torsiune* este un corp rigid suspendat printr-un fir elastic, în jurul căruia efectuează oscilaţii de torsiune

$$T = 2\pi\sqrt{I/C}. \tag{1.158}$$

Frecvenţa oscilaţiilor armonice libere depinde numai de proprietăţile sistemului oscilant (constantele k, m) şi nu depinde de amplitudinea oscilaţiilor. Aceasta este *legea izocronismului* oscilaţiilor mici; oscilaţiile mici sint izocrone. Dimpotrivă, amplitudinea şi faza iniţială depind de condiţiile iniţiale (x_0, v_0):

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2},\ \operatorname{tg}\alpha = -v_0/(\omega x_0) \tag{1.159}$$

3. **Compunerea oscilaţiilor sinusoidale:** a) Prin compunerea a două oscilaţii sinuscidale de aceeaşi frecvenţă şi aceeaşi direcţie se obţine tot o oscilaţie sinusoidală de aceeaşi frecvenţă şi direcţie:

$$A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \tag{1.160}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{A}(A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2),$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{A}(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Se poate folosi construcţia grafică a lui Fresnel (fig. 1.46).

Scanned with CamScanner

Dacă frecvenţele sînt difrite însă apropiate, se obţine fenomenul *bătăilor* (fig. 1.47).

$$x = 2A\cos\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cdot$$

$$\cdot\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,t + \alpha\right] \tag{1.161}$$

$$\omega_b = |\omega_2 - \omega_1|,$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}.$$

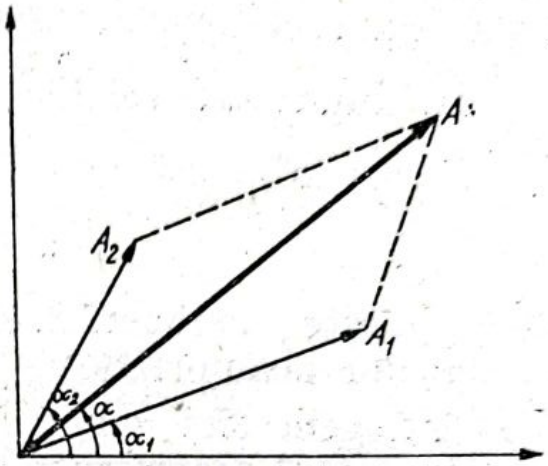


Fig. 1.46

b) Prin compunerea a două oscilaţii sinusoidale de aceaşi frecvenţă şi de direcţii perpendiculare se obţine o mişcare periodică pe elipsă

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),\ y = B\cos(\omega t + \beta),$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha). \tag{1.162}$$

Elipsa devine o dreaptă dacă $\beta - \alpha = 0$ sau π.

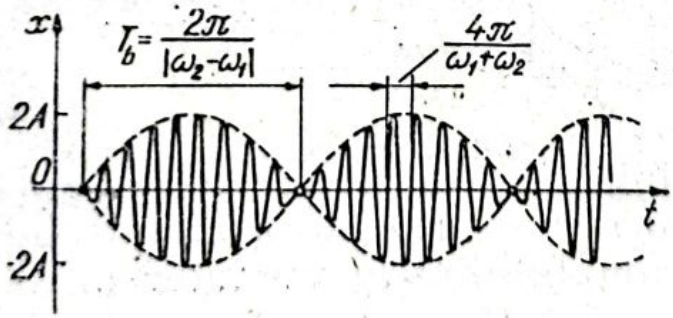


Fig. 1.47

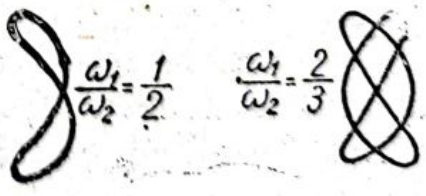


Fig. 1.48

Dacă frecvenţele sînt diferite, dar într-un raport raţional (de numere întregi), se obţin figurile lui Lissajous (fig. 1.48).

Scanned with CamScanner

4. **Oscilaţii amortizate.** În multe cazuri amortizarea (stingerea) oscilaţiilor se datoreşte unei forţe de rezistenţă (de frecare) din partea mediului, de tipul : $\vec{F}_r = -r\vec{v}$, r fiind un coeficient de rezistenţă. Atunci ecuaţia oscilatorului amortizat va fi

$$F = m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad b = r/(2m),$$
$$\omega^2 = k/m, \tag{1.163}$$

unde b este coeficientul de amortizare şi ω frecvenţa oscilaţiilor neamortizate.

Distingem trei cazuri : a) $b < \omega$. Oscilaţiile sînt de tip sinusoidal amortizat (fig. 1.49)

$$x = A_0 e^{-bt}\cos(\omega' t + \alpha), \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega \tag{1.164}$$

unde ω' este frecvenţa oscilaţiilor amortizate ; frecările totdeauna se opun mişcării şi o întîrzie, mărind perioada, adică micşorînd frecvenţa oscilaţiilor.

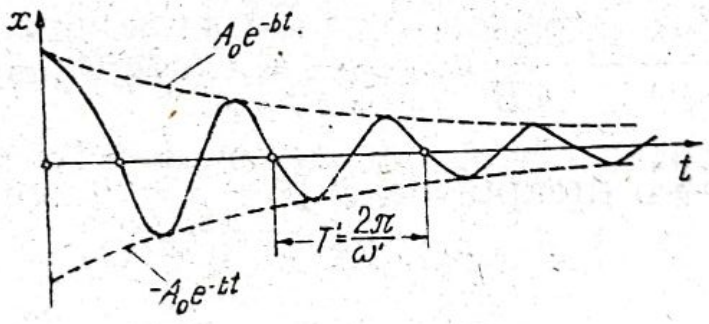


Fig. 1.49

O caracteristică a gradului de amortizare este *decrementul logaritmic*, egal cu logaritmul natural al raportului dintre două elongaţii sau amplitudini la un interval T'

$$D = bT' = \frac{2\pi b}{\omega'} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}. \tag{1.165}$$

O măsură a duratei oscilaţiilor amortizate este timpul de viaţă : $\tau = 1/b$, care arată după cît timp amplitudinea

Scanned with CamScanner

scade de $e = 2{,}718$ ori. Dacă N_0 este numărul oscilaţiilor după care amplitudinea scade la jumătate, atunci

$$D = \frac{\ln 2}{N_0} = \frac{0{,}693}{N_0}. \tag{1.166}$$

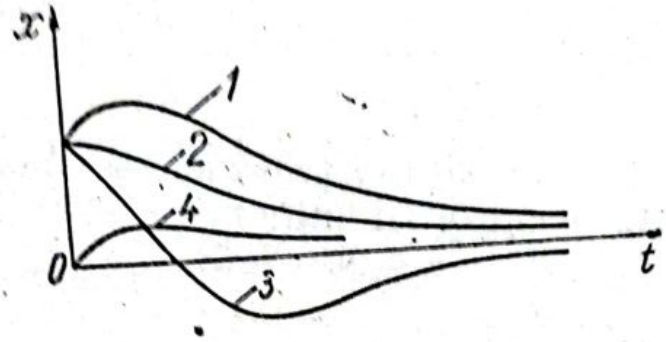


Fig. 1.50

Energia totală scade exponenţial cu exponentul de amortizare $2b$

$$E = E_0\, e^{-2bt}. \tag{1.167}$$

b) $b > \omega$. Mişcarea este aperiodică (fig. 1.50)

$$x = A_1 \exp(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})\, t + \\ + A_2 \exp(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})\, t. \tag{1.168}$$

c) $b = \omega$. Mişcarea este aperiodică critică (seamănă cu fig. 1.50)

$$x = (A_1 + A_2 t)\, e^{-bt}. \tag{1.169}$$

5. **Oscilaţii forţate.** Dacă se aplică sistemului o forţă exterioară periodică, avem ecuaţia mişcării

$$F = m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t \tag{1.170}$$

a cărei soluţie este

$$x = A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) + B \cos(\Omega t + \beta), \tag{1.171}$$

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\,\Omega^2}} =$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \qquad (1.172)$$

$$\sin\beta = -2b\Omega\,\frac{mB}{F_0} < 0,$$

$$\cos\beta = (\omega^2 - \Omega^2)\frac{mB}{F_0}.$$

Soluția (1.171) reprezintă *regimul tranzitoriu*: suprapunerea oscilațiilor proprii amortizate și a oscilațiilor permanente. După $t > \tau = 1/b$, oscilațiile proprii se sting

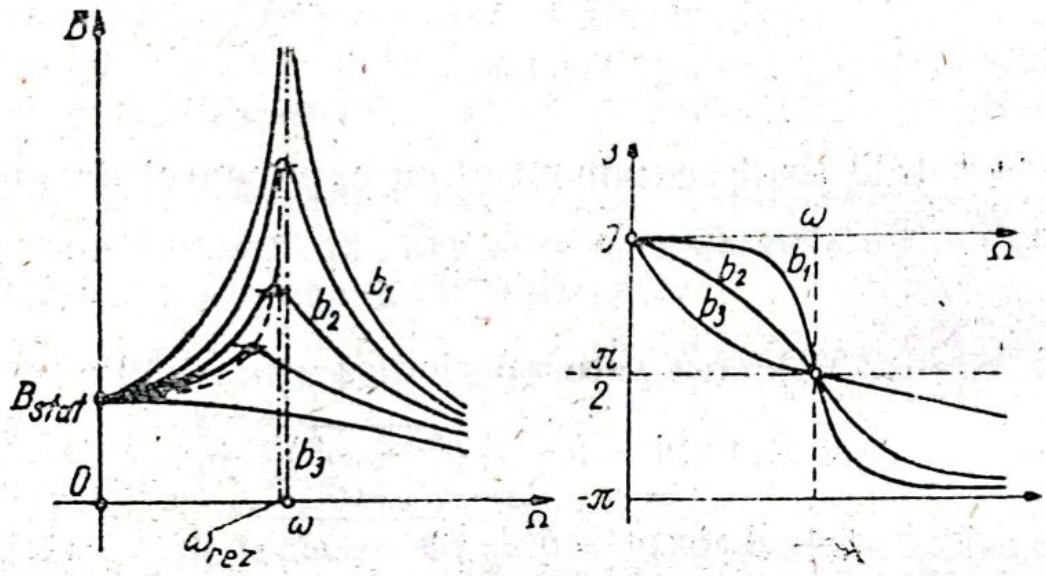


Fig. 1.51

și rămîne *regimul permanent* al oscilațiilor forțate: $B\cos(\Omega t + \beta)$, care rămîn, ca fază, totdeauna în urma forței: $\beta < 0$. Pentru $\Omega < \omega$ avem $-\pi/2 < \beta < 0$, pentru $\Omega > \omega$ avem $-\pi < \beta < -\pi/2$.

6. **Rezonanța.** a) Dacă Ω este variabil, amplitudinea B devine maximă pentru frecvența (*rezonanța elongațiilor*)

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} = \sqrt{\omega'^2 - b^2} < \omega' < \omega, \qquad (1.173)$$

$$B_{max} = \frac{F_0}{2m\omega' b} = \frac{F_0}{r\omega'} = \frac{F_0}{r\sqrt{\omega^2 - b^2}}.$$

Scanned with CamScanner

în comparație cu elongația statică B_{stat} produsă de forța constantă F_0 avem

$$\frac{B_{max}}{B_{stat}} = \frac{\omega}{2b\sqrt{1-(b/\omega)^2}}. \tag{1.174}$$

Pentru amortizări mici, $b \ll \omega$, rezultă o creștere mare a amplitudinii la rezonanță

$$\frac{B_{max}}{B_{stat}} \approx \frac{\omega}{2b} \gg 1 \text{ dacă } b \ll \omega. \tag{1.175}$$

Ecuația curbei pe care se situează amplitudinile maxime (fig. 1.51):

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega^4 - \Omega^4}} = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 + \Omega^4 m^2}}. \tag{1.176}$$

b) Maximul amplitudinii vitezei

$$v = \dot{x} = -\Omega B \sin(\Omega t + \beta) =$$
$$= \Omega B \cos(\Omega t + \beta + \pi/2)$$

are loc pentru frecvența $\Omega = \omega$ (*rezonanța vitezelor*)

$$\Omega = \omega_j, (v_m)_{max} = (B\Omega)_{max} = \frac{F_0}{2mb} = \frac{F_0}{r}. \tag{1.177}$$

În acest caz amplitudinea B nu este maximă

$$B_0 = \frac{F_0}{r\omega} < B_{max} = \frac{F_0}{r\omega'}. \tag{1.178}$$

Puterea medie pe o perioadă, dezvoltată de forța F, este

$$\bar{P} = \overline{Fv} = \frac{1}{2} F_0 \Omega B \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.179}$$

și este maximă la rezonanța vitezelor, cînd $\beta = -\pi/2$ și viteza este în fază cu forța:

$$\bar{P}_{max} = \frac{F_0^2}{4mb} = \frac{F_0^2}{2r}. \tag{1.180}$$

Scanned with CamScanner

În apropierea rezonanței, cînd $|\Omega - \omega| \ll \omega$, și pentru amortizări mici, $b \ll \omega$, avem

$$B \approx \frac{B_{max}}{\sqrt{1 + (\omega - \Omega)^2/b^2}} \quad |\Omega - \omega| \ll \omega, \quad b \ll \omega. \quad (1.181)$$

Amplitudinea începe să scadă sensibil cînd $|\Omega - \omega| \sim b$, deci coeficientul de amortizare b caracterizează semilărgimea curbei de rezonanță (cînd B scade de $\sqrt{2}$ ori) (fig. 1.52).

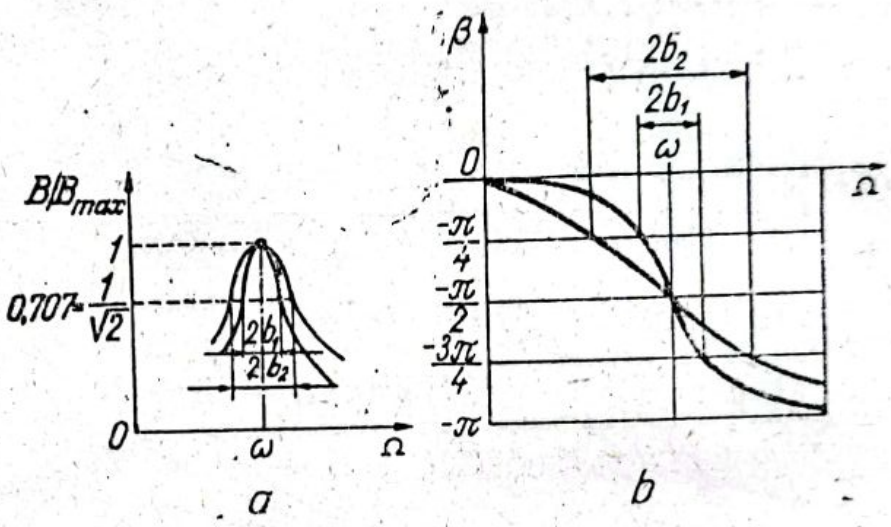


Fig. 1.52

7. Analogia mecanico-electrică

Mărimi mecanice	*Mărimi electrice*
forța F, [N]	tensiunea electrică u, [V]
viteza v, [m/s]	intensitatea curentului i, [A]
elongația x, [m]	sarcina electrică q, [C]
coeficient de rezistență r, [kg/s]	rezistența electrică R, [Ω]
masa m, [kg]	inductanța L, [H]
constanta elastică k, [N/m]	inversul capacității $1/C$, [$1/F$]
reactanța inerțială Ωm[kg/s]	reactanța inductivă ωL, [Ω]
reactanța elastică k/Ω, [kg/s]	reactanța capacitivă $1/\omega C$, [Ω]
impedanța mecanică complexă $\bar{Z} = r + i(\Omega m \quad k/\Omega)$	impedanța complexă $\bar{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$
$Z = \lvert\bar{Z}\rvert = \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}$	$Z = \lvert\bar{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Scanned with CamScanner

Mărimi mecanice	*Mărimi electrice*
amplitudinea elongaţiei : $$B = \frac{F_0}{\Omega Z}$$	amplitudinea sarcinii : $$q_m = \frac{U_m}{\omega Z}$$
amplitudinea vitezei : $$v_m = F_0/Z$$	amplitudinea curentului : $$I_m = U_m/Z$$
puterea medie : $$\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 v_m \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$$	puterea : $$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi.$$

1.11. Unde elastice

1. **Unda plană.** a) *Elongaţiile* particulelor, măsurate de la poziţiile lor de echilibru, într-o undă plană progresivă neamortizată (neatenuată), care se propagă cu viteza c în sensul pozitiv al axei Ox, sînt

$$\xi(x, t) = f(t - x/c) = F(x - ct). \qquad (1.182)$$

b) Unda este *longitudinală* dacă elongaţiile (vibraţiile) particulelor sînt în direcţia de propagare a undei, şi *transversală*, dacă elongaţiile sînt perpendiculare pe direcţia de propagare (undele transversale nu pot exista în fluide).

Pentru unda plană *monocromatică* avem

$$\xi(x, t) = A \cos\omega(t - x/c) =$$

$$= A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1.183)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Scanned with CamScanner

unde k este numărul *de undă*. Mai general, dacă unda se propagă în direcția versorului $\vec{n}$, avem

$$\xi = A\cos(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}),\ \vec{k} = k\,\vec{n} \qquad (1.184)$$

unde $\omega t - \vec{k}\,\vec{r}$ este faza undei, iar $\vec{k}$ vectorul de undă.

c) *Suprafețele de undă* sînt suprafețe de fază constantă și ele sînt perpendiculare (în medii izotrope) pe direcția de propagare a undei. Normalele pe suprafețele de undă se numesc raze.

d) *Viteza de fază* este viteza de propagare a fazei. În cazul undei plane monocromatice

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c. \qquad (1.185)$$

Undele elastice (numite și sunete sau unde sonore) se impart în 3 game : infrasunete cu frecvențele sub 16 Hz, sunete (auzibile) cu frecvențele între 16 Hz și 20 kHz (lungimi de undă în aer între 20 m și 2 cm) și ultrasunete cu frecvențe peste 20 kHz (pînă la ~1 GHz).

2. **Deformația** ε, respectiv γ, a mediului *solid* produsă de o undă longitudinală, respectiv transversală, este

$$\varepsilon(x,\ t) = \frac{\partial \xi}{\partial x},\ \text{respectiv}\ \gamma(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (1.186)$$

În cazul undei plane progresive $\xi = f(t \mp x/c)$ rezultă

$$\varepsilon \text{ sau } \gamma = \mp \frac{v}{c} \qquad (1.187)$$

adică deformația este maximă acolo unde viteza particulelor este maximă.

Toate tipurile de unde care se propagă într-un mediu liniar, omogen, izotrop și conservativ verifică *ecuația undelor*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (1.188)$$

Scanned with CamScanner

3. **Viteza de propagare** a undelor longitudinale într-o bară, respectiv într-un mediu solid nemărginit, este

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ (Newton)}, \quad c_l' = \sqrt{\frac{E'}{\rho}},$$

$$E' = E\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{1.189}$$

Ca ordin de mărime $c \sim 5$ km/s. Viteza de propagare a undelor transversale (posibile numai în solide)

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} < c_l. \tag{1.189'}$$

4. **Undele în fluide.** Într-un mediu *fluid*, variaţia de densitate şi de presiune produsă de o undă sonoră sînt

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \Delta p = p - p_0 = c^2\Delta\rho \tag{1.190}$$

unde ρ_0, p_0 sînt densitatea şi presiunea în absenţa undei. Variaţiile de densitate şi de presiune sînt proporţionale între ele şi sînt maxime acolo unde deformaţia a mediului este maximă. În cazul undei plane progresive $\xi = f(t \mp x/c)$, rezultă

$$\Delta\rho/\rho_0 = \pm v/c. \tag{1.191}$$

Viteza de propagare a undelor în fluide

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{ad}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}K_{ad}}, \quad K = -V_0\frac{\partial p}{\partial V} \tag{1.192}$$

unde K_{ad} este modulul de compresiune adiabatică.

În cazul *gazelor* (*perfecte*)

$$K_{ad} = \gamma p, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad c = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}} =$$

$$= c_0\sqrt{1+\alpha t} \tag{1.193}$$

Scanned with CamScanner

unde γ este raportul căldurilor specifice (exponentul adiabatic), $R = 8{,}314$ J/(mol · K) — constanta gazelor, μ — masa molară (kg/mol), $\alpha = 1/273{,}15$ K^{-1}.

Viteza sunetului în aer la 20°C, $c = 340$ m/s. iar în apă la 20°C, $c = 1480$ m/s.

5. **Densitatea de energie** (cinetică și potențială) într-o undă progresivă este proporțională cu pătratul vitezei particulelor sau cu pătratul presiunii sonore

$$\frac{W}{V_0} = w = \rho_0 v^2 = \frac{1}{\rho_0 c^2}(\Delta p)^2. \qquad (1.194)$$

În cazul undei, plane monocromatice

$$w = \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad \bar{w} = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 A^2 \qquad (1.195)$$

(w — valcarea instantanee, $\bar{\omega}$ — valoarea medie).

Densitatea fluxului de energie într-o undă progresivă

$$wc = \rho_0 c\overline{v^2} = \frac{1}{\rho_0 c}(\Delta p)^2. \qquad (1.196)$$

6. **Intensitatea sunetului** este valoarea medie a densității fluxului de energie

$$I = \rho_0 c\bar{v}^2 = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{1}{\rho_0 c}\overline{(\Delta p)^2} = \frac{1}{\rho_0 c}(\Delta p)_{ef}^2$$

$$[I] = \mathrm{W/m^2}; \qquad (1.197)$$

în cazul undei plane monocromatice

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho_0 c v_{max}^2 = \rho_0 c v_{ef}^2 =$$

$$= \frac{1}{2\rho_0 c}(\Delta p)_{max}^2 = \frac{1}{\rho_0 c}(\Delta p)_{ef}^2. \qquad (1.198)$$

Scanned with CamScanner

Intensitatea sunetului este proporţională cu pătratul amplitudinii vitezei de oscilaţie a particulelor sau cu pătratul amplitudinii presiunii sonore.

Elongaţia particulelor într-o undă sferică

$$\xi(r,\ t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr) \qquad (1.199)$$

unde r este distanţa pînă la centrul undelor sferice.

Analogia acustico-electrică

Mărimile acustice	*Mărimile electrice*
presiunea sonoră Δp, $(\Delta p)_{ef}$, [Pa] viteza v, v_{ef}, [m/s] rezistenţa acustică :	tensiunea u, U, [V] intensitatea curentului i, I[A] rezistenţa electrică
$R_a = \rho_0 c$, [N · s/m³]	R, [Ω]
$\Delta p = \rho_0 c \cdot v = R_a v$	legea Ohm :
$(\Delta p)_{cf} = \rho_0 c v_{ef} = R_a v_{cf}$	$u = Ri$, $U = RI$
intensitatea sunetului I, [W/m²]	puterea P, [W]
$I = \rho_0 c \cdot v_{ef}^2 = \frac{(\Delta p)_{ef}^2}{\rho_0 c} = (\Delta p)_{ef} v_{ef}$	$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} = UI$

7. **Principiul suprapunerii** (superpoziţiei) undelor înseamnă suprapunerea independentă a proceselor ondulatorii sau oscilatorii : elongaţiile se compun vectorial, fără a se perturba reciproc.

a) *Interferenţa undelor* este fenomenul de suprapunere a undelor, cu întărirea sau slăbirea reciprocă a oscilaţiilor. Prezintă interes interferenţa undelor de la două surse *coerente*, care au aceeaşi frecvenţă şi diferenţă de fază constantă.

b) Prin suprapunerea undei incidente cu cea reflectată se nasc *undele staţionare* cu elongaţiile particulelor

$$\xi(x,\ t) = 2A\cos(kx + \beta)\cos(\omega t + \beta). \qquad (1.200)$$

Scanned with CamScanner

În punctele date de $\cos(kx + \beta) = \pm 1$ amplitudinea este maximă (umflături sau ventre), iar în punctele date de $\cos(kx + \beta) = 0$, amplitudinea este permanent nulă (noduri). Distanța dintre două umflături sau noduri succesive este egală cu $\lambda/2$. În fig. 1.53 sînt reprezentate elon-

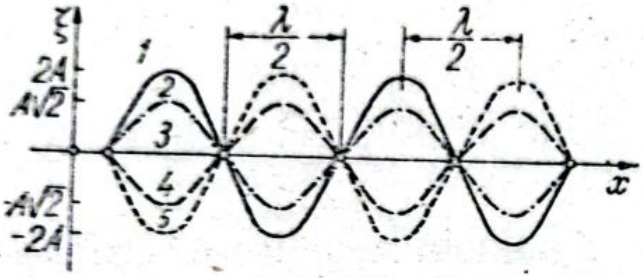


Fig. 1.53

gațiile particulelor într-o undă staționară la 5 momente succesive de timp, la un interval $T/8$. Particulele situate între două noduri vecine (succesive) oscilează toate în fază; la traversarea unui nod faza oscilațiilor se schimbă cu π. Amplitudinea deformației este maximă în noduri și nulă în ventre. Variația densității și presiunii într-o undă staționară într-un fluid are amplitudine maximă tot în noduri.

Dacă mediul pe care se reflectă unda este mai dens decît mediul în care se propagă unda, pe suprafața de reflexie se formează un nod : faza se schimbă cu π (sau se „pierde" un $\lambda/2$). În cazul reflexiei pe un mediu mai puțin dens, se formează o umflătură (fără schimbare de fază).

8. **Difracția** este fenomenul de ocolire de către undă a obstacolelor care au dimensiuni comparabile cu lungimea de undă sau, altfel, de curbare a razelor.

Construcția frontului de undă se poate face cu ajutorul *principiului lui Huygens* (1690) : Fiecare punct al mediului la care a ajuns frontul de undă constituie o nouă sursă de oscilații care se propagă înainte. Înfășurătoarea tuturor acestor suprafețe de undă elementare dă noul front de undă.

9. **La reflexie și refracție** razele incidentă, reflectată, refractată și normala la suprafața de separație a mediilor

Scanned with CamScanner

sînt în același plan. Unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie. Legea refracției

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ sau } \frac{\sin \alpha}{c} = \text{const.} \qquad (1.201)$$

Raza refractată deviază totdeauna spre regiunea cu viteza de propagare mai mică. Dacă $c_1/c_2 < 1$ și $\alpha_1 > \alpha_l = \arcsin(c_1/c_2)$ unde α este unghiul limită, se produce *reflexia totală* (raza refractată dispare).

10. **Efectul Doppler** constă în variația *frecvenței* înregistrate de un receptor atunci cînd sursa și receptorul se apropie sau se depărtează unul de altul. Frecvența înregistrată :

$$\nu' = \nu \frac{c + v_{recep}}{c - v_{sursă}} \qquad (1.202)$$

unde intervin numai componentele longitudinale ale vitezelor (considerate pozitive dacă sursa sau receptorul se apropie unul de altul).

11. Dacă viteza de propagare a undei (viteza de fază) depinde de lungimea de undă sau de frecvență, se observă fenomenul de dispersie a undelor : undele de diferite frecvențe se propagă cu viteze diferite. Un semnal format din suprapunerea mai multor unde (pachet de unde) se deformează. Viteza de propagare a semnalelor sau a energiei se numește *viteză de grup*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \qquad (1.203)$$

Dispersia undelor sonore este neglijabilă (există dispersia, de exemplu, la undele de suprafață).

12. În cazul mediilor *absorbante*, amplitudinea scade după legea

$$A = A_0 e^{-\varkappa x}, \quad [\varkappa] = \text{m}^{-1} \qquad (1.204)$$

unde $\varkappa$ este *constanta de atenuare* (a amplitudinii). Pe distanța $\delta = 1/\varkappa$, numită *lungime de atenuare*, amplitu-

Scanned with CamScanner

dinea scade de $e = 2{,}718$ ori. Intensitatea sunetului scade după legea

$$I = I_0 e^{-2\varkappa x} \tag{1.205}$$

unde $2\varkappa$ este *coeficientul de absorbție* sonoră al mediului La fluide acest coeficient depinde de vîscozitate și de conductibilitatea termică, de asemenea de frecvența sunetului și de densitatea mediului.

1.12 Sisteme acustice.

1. Undele transversale într-o *coardă vibrantă* se propagă cu viteza

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \tag{1.206}$$

unde F este forța de tensiune din coardă, ρ — densitatea și S — aria secțiunii coardei.

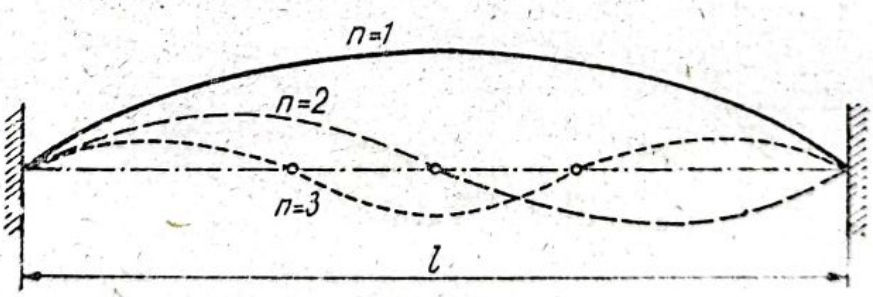


Fig. 1.54

Undele *staționare* au frecvențele și lungimile de undă (fig. 1.54)

$$\nu_n = n \frac{v}{2l} = n\nu_1, \quad \lambda_n = \frac{2l}{n},$$

$$n \text{ — număr natural.} \tag{1.207}$$

Scanned with CamScanner

2. În *tuburile sonore*, închise sau deschise, se formează undele staționare având frecvențele și lungimile de undă (fig. 1.55):

— Tuburi închise

$$\nu = (2n-1)\cdot\frac{c}{4l} = (2n-1)\,\nu_1, \quad \lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \qquad (1.208)$$

— Tuburi deschise

$$\nu_n = n\,\frac{c}{2l} = n\nu_1, \qquad (1.209)$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n},\ n \text{ — număr natural.}$$

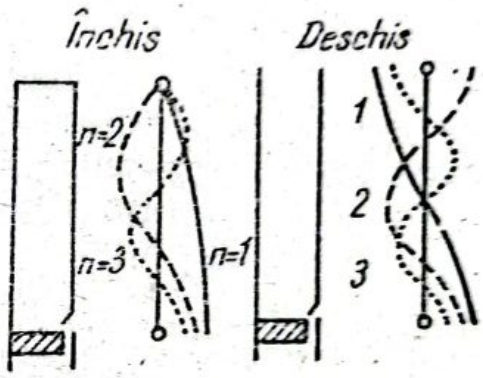


Fig. 1.55

3. *Urechea omenească.* a) Conform *legii Weber-Fechner* variația intensității *senzației* este proporțională cu *logaritmul* raportului dintre intensitățile respective ale excitației

$$S_2 - S_1 = k\log(I_2/I_1). \qquad (1.210)$$

Dacă intensitatea excitației crește în progresie geometrică, intensitatea senzației crește în progresie aritmetică.

b) *Nivelul de intensitate sonoră* L măsurat în beli (B) (după numele lui Bell), respectiv, în decibeli (dB), se definește prin relația:

$$L = \lg\frac{I}{I_0} \text{ în } B \text{ sau } L = 10\lg\frac{I}{I_0} =$$

$$= 20\lg\frac{(\Delta p)_{ef}}{(\Delta p)_0}, \text{ în dB} \qquad (1.211)$$

unde $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ este intensitatea de referință, egală cu pragul auditiv inferior la 1 kHz, $(\Delta p)_0 = 2\cdot10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$ — presiunea sonoră corespunzătoare (în aer).

B.C.U.

Scanned with CamScanner

c) *Nivelul intensității auditive* sau *tăria sunetului*, măsurată în foni (phon), este egală cu nivelul sonor exprimat în dB al sunetului de referință de 1 kHz care produce *aceeași intensitate a senzației auditive* ca și sunetul considerat.

La pragul auditiv superior intensitatea sonoră ajunge la $I_m = 100\ \mathrm{W/m^2}$ și presiunea sonoră $(\Delta p)_{ef} = 200\ \mathrm{N/m^2}$ ($L_m = 140$ dB).

d) *Exemple*: la distanța de 1 m: tic-tacul unui ceasornic 20 phon, vorbire înceată 40 phon, vorbire obișnuită 65 phon, vorbire tare 80 phon, orchestră mare 100 phon, motor de avion 130 phon.

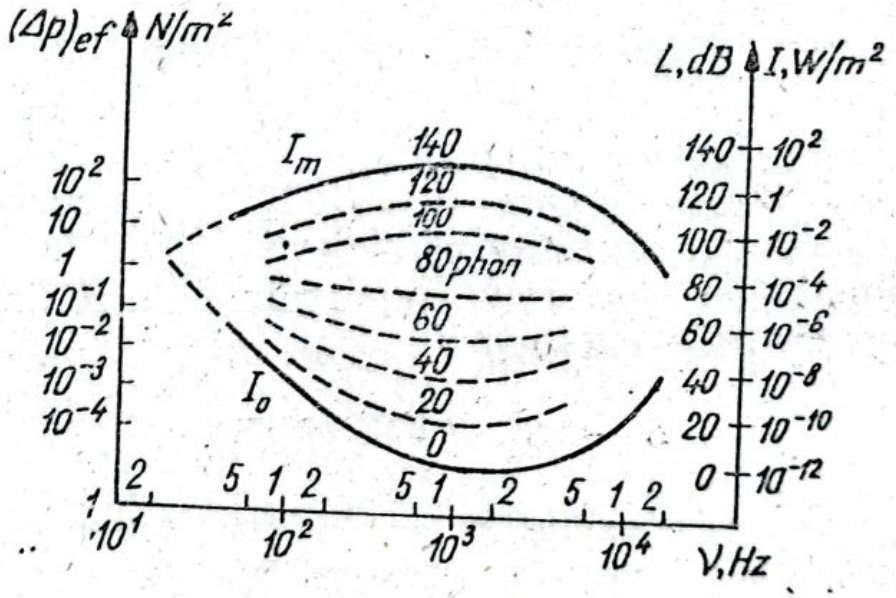


Fig. 1.56

În fig. 1.56 sînt reprezentate intensitățile și nivelele sonore în funcție de frecvență pentru o ureche medie.

2.
Căldura, fizica moleculară și termodinamica

Acest capitol al fizicii se ocupă cu mișcarea termică a materiei — mișcarea dezordonată a atomilor și moleculelor care compun corpurile.

2.1. Termometrie

1. **Temperatura** caracterizează starea termică a corpului, adică gradul lui de încălzire. Dacă temperaturile a două corpuri sînt egale, atunci ele se află în echilibru termic, adică nu trece energie termică de la unul la altul (v. § 2.8). Temperatura este legată de energia cinetică (medie) a mișcării termice a atomilor și moleculelor care formează corpul (v. § 2.4 — 2.5).

2. **Termometrele** empirice obișnuite se bazează pe dilatarea termică a unui lichid, de obicei mercurul. Alte termometre se bazează pe variația cu temperatura a rezistenței electrice (termometre cu rezistență, termistori), a tensiunii termoelectromotoare a unui termocuplu sau a intensității radiației (pirometre optice).

Termometrele cu gaz se bazează pe dilatarea termică izobară a gazelor sau pe variația izocoră a presiunii cu temperatura (de obicei hidrogenul pentru temperaturi mai joase și azotul pentru temperaturi mai înalte).

3. **Scara Celsius** a temperturilor (°C) este definită prin punctul de topire al gheții pure (sau punctul de înghețare al apei în aer, saturat cu vapori de apă) la

Scanned with CamScanner

presiunea atmosferică normală (1 atm = 760 torr = = 101325 N/m²), considerat 0°C, și punctul de fierbere al apei la presiunea atmosferică normală, considerat 100°C. *Gradul Celsius* (1°C) este a suta parte din acest interval de bază.

Scara Fahrenheit a temperaturilor (°F) a fost definită prin punctul de topire al amestecului de zăpadă și amoniac, considerat 0°F, și temperatura normală a corpului uman, considerată 100°F. Punctele fundamentale din scara Celsius au în scara Fahrenheit valorile: 32° F pentru 0°C și 212°F pentru 100°C.

Scara Réaumur este definită prin aceleași puncte fundamentale ca și scara Celsius, dar li se prescriu valorile: 0°R pentru 0°C și 80°R pentru 100°C.

Legătura dintre temperaturile exprimate în cele trei scări este

$$\frac{1}{5}\,t\,[°C] = \frac{1}{4}\,t\,[°R] = \frac{1}{9}\,(t[F°] - 32). \qquad (2.1)$$

4. **Punctul triplu** al unei substanțe este temperatura la care coexistă în echilibru termic cele trei faze (solidă, lichidă și gazoasă) ale substanței.

Punctul triplu al *apei* este la 0,01°C.

Punctul triplu se poate reproduce experimental cu mare precizie, de exemplu la apă cu o precizie de 0,0001°C.

5. **Scara termodinamică** a temperaturilor (scara absolută Kelvin) se definește pe baza principiului II al termodinamicii cu ajutorul ciclului ideal Carnot (reversibil) prescriind punctului triplu al apei *exact* valoarea T_t = = 273,16 K (v. § 2.8). Raportul temperaturilor termodinamice este egal cu raportul căldurilor absorbită și cedată în ciclul ideal Carnot realizat între cele două temperaturi și nu depinde de substanța de lucru. Valoarea prescrisă punctului triplu al apei (273,16 K) s-a ales astfel încît gradul Kelvin (1 K) să coincidă cît mai precis cu gradul Celsius (1°C), definit mai sus. Punctului 0°C îi corespunde T_0 = 273,15 K iar punctului 100°C îi corespunde 373,15K.

Scanned with CamScanner

Scara termodinamică coincide cu scara temperaturilor definită cu ajutorul gazului *ideal* (perfect) drept corp termometric, fie prin variaţia izobară a volumului, fie prin variaţia izocoră a presiunii. Produsul pV al gazului ideal este proporţional cu temperatura termodinamică T (v. § 2.4).

Scara Celsius termodinamică se obţine din scara termodinamică absolută (Kelvin) prin relaţia de definiţie:

$$t[°C] = T[K] - 273{,}15 = T - T_0. \qquad (2.2)$$

6. **Scara Celsius internaţională** (practică) se defineşte cu ajutorul a şase temperaturi primare fixe, bine determinate (punctele fundamentale ale scării) şi a unor metode standard de determinare a temperaturilor intermediare, astfel încît această scară să coincidă cît mai precis cu scara Celsius termodinamică (2.2).

Punctele fixe fundamentale ale scării internaţionale a temperaturilor (°C)

1) Punctul de fierbere al oxigenului	—182,970
2) Punctul triplu al apei	0,01
3) Punctul de fierbere al apei	100
4) Punctul de fierbere al sulfului	444,600
5) Punctul de solidificare al argintului	960,8
6) Punctul de solidificare al aurului	1 063,0

În locul punctului de fierbere al sulfului se poate lua punctul de solidificare al zincului 419,505°C.

Punctele fixe auxiliare (secundare) ale scării internaţionale a temperaturilor (în °C) sînt date de punctele de solidificare ale următoarelor elemente chimice (pentru Hg se dă temperatura de fierbere): 1) Sn 231,9; 2) Cd 320,9; 3) Pb 327,3; 4) Hg 356,58; 5) Zn 419,5; 6) Sb 630,5; 7) Al 660,1; 8) Cu 1083; 9) Ni 1453; 10) Co 1492; 11) Pd 1552; 12) Pt 1769; 13) Rh 1960; 14) Ir 2443; 15) W 3380.

La termometrele empirice cu lichid, volumul unei diviziuni v este egal cu creşterea aparentă de volum a lichidului termometric la o creştere a temperaturii cu 1°C

$$v = V_r(\beta - 3\alpha), \qquad (2.3)$$

Scanned with CamScanner

unde V_r este volumul rezervorului, β — coeficientul de dilatare al lichidului termometric și $\varkappa$ — coeficientul de dilatare liniară al sticlei.

7. **Termometrul etalon** pentru măsurarea temperaturilor între 0°C și 630,5°C (solidificarea stibiului) este termometrul cu rezistență de platină, a cărui rezistență variază după legea

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2), \qquad (2.4)$$

unde constantele A, B se determină măsurînd rezistența firului la temperaturile de fierbere a apei (100°C) și a sulfului (444,600°C).

Pentru măsurarea temperaturilor între −182,97°C (fierberea oxigenului) și 0°C servește tot termometrul cu rezistență de platină, însă variația rezistenței urmează legea

$$R_t = R_0[1 + At + Bt^2 + C(t - 100)t^3] \qquad (2.5)$$

unde constantele A, B, C se determină cu ajutorul punctelor de fierbere al apei (100°C), al sulfului (444,600°C) și al oxigenului (−182,97°C).

Între 630,5°C (solidificarea stibiului) și 1063,0°C (solidificarea aurului) temperatura se măsoară cu ajutorul termocuplului de platină — platină + 10% iridiu, una din suduri fiind la 0°C. Tensiunea termoelectromotoare se aproximează prin formula

$$E = a + bt + ct^2, \qquad (2.6)$$

unde constantele a, b, c se determină măsurînd pe E la temperaturile de solidificare a stibiului (630,5°C), argintului (960,8°C) și aurului (1063,0°C). Puritatea platinei în termometrele de mai sus trebuie să fie înaltă, astfel încît raportul rezistențelor $R_{100}/R_0 \geqslant 1{,}3910$.

Pentru temperaturi mai înalte decît 1063°C (solidificarea aurului) se folosesc pirometrele optice, bazate pe legile radiației corpului negru.

Scanned with CamScanner

2.2. Dilatometrie

1. Dilatarea liniară

$$l = l_0(1 + \alpha t) = l_0[1 + \alpha(T - T_0)], \quad [\alpha] = K^{-1} \tag{2.7}$$

unde l_0 este lungimea la 0°C, t — temperatura în scara Celsius (°C) și α — coeficientul de dilatare liniară (mediu).

Se pot defini coeficienți α și pentru alte temperaturi de referință

$$l = l_r[1 + \alpha'(t - t_r)] = l_r(1 + \alpha'(T - T_r)] \tag{2.8}$$

unde l_r este lungimea la temperatura de referință t_r.

Dacă l_1, l_2 sînt lungimile la temperaturile t_1, t_2, atunci

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1), \; l_2 = l_0(1 + \alpha t_2),$$

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}. \tag{2.9}$$

Neglijînd termenii pătratici, în α, deoarece α este foarte mic $\sim 10^{-5}$ K^{-1}, deci $\alpha t \sim 10^{-3}$, putem scrie

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = l_1 \frac{(1 + \alpha t_2)(1 - \alpha t_1)}{1 - \alpha^2 t_1^2} \approx$$

$$\approx l_1 \; [1 + \alpha(t_2 - l_1)]$$

$$l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta t) = l_1(1 + \alpha \Delta T). \tag{2.10}$$

Pentru creșterea de lungime avem

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_0 \alpha(t_2 - t_1) = l_0 \alpha \Delta t = l_0 \alpha \Delta T. \tag{2.11}$$

Neglijînd termenii pătratici în α, putem scrie

$$\Delta l = l \alpha \, \Delta t = l \alpha \, \Delta T \tag{2.12}$$

unde l este lungimea la o temperatură oarecare din intervalul considerat, în particular l_1 sau l_2.

În formulele de mai sus α este de fapt coeficientul mediu de dilatare liniară pe intervalul considerat de temperatură. Coeficientul de dilatare „exact" se obține

Scanned with CamScanner

prin trecere la limită și este în general funcție de temperatură

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_0}\frac{\Delta l}{\Delta t}, \quad \alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{l_0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{l_0}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \tag{2.13}$$

Pentru intervale mai largi de temperatură variația lungimii cu temperatura pentru majoritatea metalelor și pentru unele aliaje urmează o lege parabolică (pătratică) sau cubică. Multe aliaje se dilată însă neregulat.

2. Dilatarea volumică a solidelor

$$V = V_0(1 + \gamma t), \quad [\gamma] = \mathrm{K}^{-1} \tag{2.14}$$

unde V_0 este volumul la 0°C, γ — coeficientul de dilatare în volum. Se pot defini coeficienți γ și pentru alte temperaturi de referință

$$V = V_r[1 + \gamma'(t - t_r)] = V_r[1 + \gamma'(T - T_r)] \tag{2.15}$$

unde V_r este volumul la temperatura de referință t_r.

Neglijînd termenii pătratici și cubici în α, avem

$$\gamma \approx 3\alpha. \tag{2.16}$$

Dacă $V_{1,2}$ sînt volumele la temperaturile $t_{1,2}$ atunci

$$V_1 = V_0(1 + \gamma t_1), \quad V_2 = V_0(1 + \gamma t_2),$$
$$V_2 \approx V_1[1 + \gamma(t_2 - t_1)] = V_1(1 + \gamma\Delta t) =$$
$$= V_1(1 + \gamma\Delta T) \tag{2.17}$$

unde am neglijat termenii pătratici în γ

$$(\gamma = 3\alpha \sim 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}, \quad \gamma t \sim 10^{-3}).$$

Pentru creșterea de volum avem

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_0\gamma(t_2 - t_1) = V_0\gamma\Delta t \approx V\gamma\Delta t. \tag{2.18}$$

Coeficientul de dilatare volumică este în general funcție de temperatură

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{2.19}$$

Scanned with CamScanner

La solide termenii superiori în α sau γ pot fi în general neglijați, întrucît precizia de obicei nu depășește termenii liniari (cum este relația $\gamma = 3\alpha$).

3. Dilatarea lichidelor

$$V = V_0(1 + \beta t), \ [\beta] = \text{K}^{-1}, \tag{2.20}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_0\beta(t_2 - t_1) = V_0\beta\Delta t \tag{2.21}$$

unde V_0 este volumul la 0°C și β — coeficientul de dilatare (absolută) (Se pot defini coeficienți β și pentru alte temperaturi de referință).

$$\bar{\beta} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad \beta(t) = \frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{2.22}$$

Lichidele fiind totdeauna cuprinse în vase, creșterea aparentă de volum va fi

$$V_{ap} = V_0(1 + \beta_{ap}t) = V_0[1 + (\beta - \gamma)t],$$

$$\Delta V_{ap} = V_0(\beta - \gamma)\,\Delta t \tag{2.23}$$

unde $\gamma = 3\alpha$ este coeficientul de dilatare volumică al vasului. La lichide $\beta \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ K^{-1} ($\beta \sim 100\gamma$).

Spre deosebire de solide, la lichide neglijarea termenilor superiori în β poate da mici erori.

Există formule de dilatare mai precise, de obicei de tipul unor polinoame în temperatura t, de exemplu pentru *mercur* :

$$V = V_0(1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4), \text{ unde}$$

$$a = 1{,}8144 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}, \tag{2.24}$$

$$b = 7{,}016 \cdot 10^{-9}\ \text{K}^{-2}, \ c = 2{,}862 \cdot 10^{-11}\ \text{K}^{-3},$$

$$d = 2{,}617 \cdot 10^{-14}\ \text{K}^{-4}.$$

Dilatarea *apei* este neregulată și poate fi aproximată printr-o funcție parabolică (pătratică)

$$V = V_0(1 - at + bt^2), \qquad a = 61{,}05 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1},$$

$$b = 7{,}733 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-2}. \tag{2.25}$$

Scanned with CamScanner

Volumul apei este minim la 4°C, cînd densitatea sa este maximă.

4. **Variația densității** cu temperatura :
La *solide*

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} = \frac{\rho_0(1 - \gamma t)}{1 - \gamma^2 t^2} \approx \rho_0(1 - \gamma t) \qquad (2.26)$$

unde ρ_0 este densitatea la 0°C. Avem aproximativ

$$\rho_2 \approx \rho_1[1 - \gamma(t_2 - t_1)] = \rho_1(1 - \gamma \Delta t),$$

$$\Delta\rho \approx - \rho\gamma\Delta t. \qquad (2.27)$$

La *lichide*

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \qquad \rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}. \qquad (2.28)$$

Se pot face aproximații de tip (2.26 — 27).

2.3. Calorimetrie

Căldura reprezintă acea formă de energie care se transmite de la un corp la altul prin contact termic, fără forțe și deplasări (spre deosebire de lucrul mecanic); ea depinde de natura procesului.

1. **Căldura absorbită** (algebric) (fără transformări de fază) este dată de formula calorimetrică fundamentală

$$Q = mc\,\Delta t = mc(t_2 - t_1) = mc(T_2 - T_1) =$$

$$= mc\,\Delta T \qquad (2.29)$$

$$[Q] = 1\ \text{J},\ [c] = 1\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}),$$

$$Q_{abs} = mc\,(t_{fin} - t_{in}),\ Q_{ced} = mc\,(t_{in} - t_{fin}) \qquad (2.30)$$

unde c este căldura specifică (medie)

$$\bar{c} = \frac{Q}{m\Delta t}, \qquad c(t) = \frac{dQ}{mdt}. \qquad (2.31)$$

Scanned with CamScanner

Căldura specifică depinde în general de temperatură (scade odată cu temperatura), precum și de natura procesului suferit de sistem.

Căldura specifică a *apei* are un minim la 34,5°C, anume 4177,9 J/(kg·K); la 0°C este 4217,4, iar la 99°C este 4214,5 J/(kg·K). Căldura specifică medie a apei se poate lua: $c \approx 4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \approx 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{K}}$.

La temperaturi suficient de joase căldura specifică a corpurilor cristaline este proporțională cu puterea a treia a temperaturii absolute ($c \sim T^3$) (legea lui Debye).

2. **Unitatea tolerată** pentru măsurarea căldurii este caloria:

Caloria de 15° (respectiv 20°) este egală cu căldura necesară unui gram de apă pură pentru a o încălzi cu 1°C (la presiunea atmosferică normală) între 14,5 și 15,5°C (respectiv 19,5 — 20,5°C)

$$1 \text{ cal}_{15} = 4{,}1855 \text{ J}; \quad 1 \text{ cal}_{20} = 4{,}1816 \text{ J}. \qquad (2.32)$$

Există încă alte două calorii: termochimică și internațională

$$1 \text{ cal}_{th} = 4{,}1840 \text{ J}.$$

$$1 \text{ cal}_{IT} = \frac{1}{860} \text{ Wh} = 4{,}1868 \text{ J}. \qquad (2.32')$$

3. **Capacitatea calorică** a unui corp este numeric egală cu cantitatea de căldură necesară corpului pentru a-și ridica temperatura cu 1°C

$$C = mc = \frac{dQ}{dT}, \quad [C] = \text{J/K}. \qquad (2.33)$$

4. **Echivalentul în apă** al unui corp (de exemplu, al vasului calorimetric etc.) este

$$A = mc/c_{\text{apă}} = C/c_{\text{apă}} \quad [A] = 1 \text{ kg}. \qquad (2.34)$$

Scanned with CamScanner

Masa atomică (respectiv, moleculară) relativă este raportul dintre masa atomului (moleculei) considerat (e) și a 12-a parte din masa atomului de carbon C^{12}.

Unitatea atomică de masă (1 u) este egală cu a 12-a parte din masa atomului C^{12}.

Un *atom-gram* (at.—g) respectiv o moleculă-gram (mol) de substanță este o cantitate de substanță a cărei masă exprimată în grame coincide cu masa atomică, respectiv moleculară, relativă.

Molul este cantitatea de substanță (materie) a unui sistem care conține atîtea entități elementare cîți atomi există în 12 g de carbon 12.

De cîte ori se întrebuințează molul, entitățile elementare trebuie specificate, ele putînd fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupri specificate de asemenea particule.

Nu trebuie confundată *masa* măsurată cu *kilogramul* cu *cantitatea de substanță* (materie) măsurată cu *molul.*

De asemenea, nu trebuie confundată *masa molară* μ în kg/mol, cu *masa moleculară* M în u (unit. atom. de masă):

$$\mu[\text{kg/mol}] = 10^{-3}\ M[\text{u}]. \tag{2.35}$$

5. **Numărul lui Avogardo** este numărul de molecule (respectiv, atomi) dintr-un mol (respectiv, at.-g) de substanță sau în general numărul de entități elementare dintr-un mol de substanță (materie):

$$N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \tag{2.36}$$

atunci

$$1\text{u} = \frac{10^{-3}}{N_A}\ [\text{kg}] = 1{,}660540 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}. \tag{2.36'}$$

6. **Căldura atomică** este căldura necesară unui atom-gram de substanță pentru a-și ridica temperatura cu 1°C

$$C_A = Ac,\ [C_A] = \frac{\text{J}}{\text{at.g} \cdot \text{K}} \tag{2.37}$$

Scanned with CamScanner

unde A este masa atomică $\left(\text{în } \frac{\text{kg}}{\text{at.-g}}\right)$ și c — căldura specifică în J/(kg · K).

7. **Căldura molară** este căldura necesară unui mol (molec.—g) de substanță pentru a-și ridica temperatura cu 1°C.

$$C_M = \mu c,\ [C_M] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \tag{2.38}$$

unde μ este masa molară (în kg/mol), legată de masa moleculară în unități atomice de masă prin relația (2.35).

8. **Conform legii Dulong-Petit** căldura atomică a elementelor chimice în stare cristalină, la temperaturi suficient de ridicate (de obicei peste 0°C), este egală cu $3R \approx 25$ J/(mol · K), unde R este constanta gazelor ($R = 8{,}314$ J/(mol. K)) sau empiric $C_A \approx 26$ J/(mol · K) (la presiune constantă).

9. **Conform legii Neumann-Kopp** căldura molară a unui compus solid este egală cu suma căldurilor atomice ale elementelor componente.

Ținînd seama și de legea Dulong-Petit, la temperaturi suficient de înalte (de obicei peste 0°C), căldura molară a unui compus solid trebuie să fie $C_M \approx 3Rs = 25s$ J/(mol · K) (empiric $C_M = 26s$ J/(mol · K), la presiune constantă), unde s este numărul atomilor din moleculă.

10. **Căldura de topire**, respectiv de *vaporizare*

$$Q_{top} = m\lambda,\ [\lambda] = \text{J/kg};$$

$$Q_{vap} = m\Lambda,\ [\Lambda] = \text{J/kg} \tag{2.39}$$

unde λ, Λ sînt *căldurile latente* de topire, respectiv vaporizare.

Căldura latentă de topire a gheții la 0°C este 335 kJ/kg ≈ 80 cal/g. Căldura latentă de vaporizare a apei la 100°C

Scanned with CamScanner

este 2256,67 kJ/kg ≈ 540 cal/g și la 0°C este 2500,58 kJ/kg.

11. **Puterea calorică** a unui combustibil este căldura degajată prin arderea unității de masă (sau unității de volum) a combustibilului. Atunci căldura totală degajată

$$Q = mq, \quad [q] = \text{J/kg}$$

sau

$$Q = Vq, \quad [q] = \text{J/m}^3. \tag{2.40}$$

12. **Principiile calorimetrice** : a) *Principiul echilibrului termic* : Un sistem izolat (sau în condiții exterioare neschimbate) ajunge mai devreme sau mai tîrziu în starea de echilibru termic cînd temperatura va fi aceeași peste tot în sistem, și niciodată după aceea sistemul nu iese de la sine din această stare (primul postulat al termodinamicii).

b) *Principiul schimbului de căldură* : Dacă mai multe corpuri, izolate de mediul exterior, sînt puse în contact termic, atunci în procesul de stabilire a echilibrului termic, căldura cedată de corpurile mai calde este egală cu căldura primită de corpurile mai reci : $Q_{ced} = Q_{abs}$.

c) *Principiul transformărilor inverse* : Cantitatea de căldură absorbită de un corp într-un anumit proces, pentru a trece dintr-o stare dată în alta, este egală cu cantitatea de căldură cedată de corp în procesul invers, cînd el revine în starea inițială dată.

2.4. Legile gazelor

1. **Legea Boyle-Mariotte** descrie transformarea izotermă a unei mase date de gaz

$$p_1V_1 = p_2V_2 = pV = \text{const},$$

$$t = \text{const}. \tag{2.41}$$

În diagrama $p - V$ legea se reprezintă printr-o ramură de hiperbolă echilateră (fig. 2.1).

Scanned with CamScanner

2. **Legea Gay-Lussac** descrie dilatarea izobară a unei mase date de gaz

$$V = V_0(1 + \alpha_v t), \qquad p = \text{const.} \tag{2.42}$$

unde coeficientul de dilatare izobară α_v variază puţin de la un gaz la altul : $\alpha_v \approx 1/273\ \text{K}^{-1}$. În diagrama $V-t$

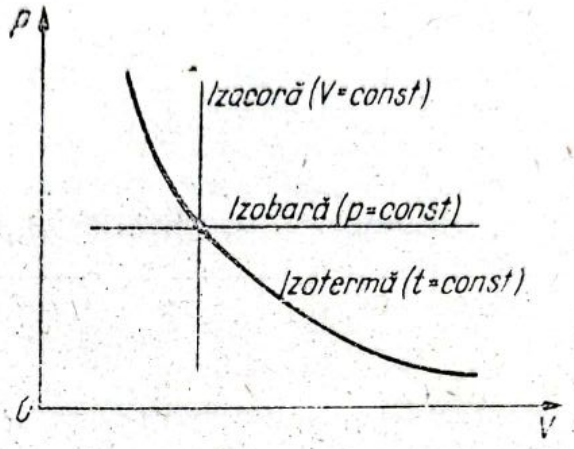


Fig. 2.1.

legea se reprezintă printr-o dreaptă care extrapolată taie axa *Ot* la temperatura $t_0 = -1/\alpha_v$ (fig. 2.2). În diagrama $p - V$ legea se reprezintă printr-o dreaptă orizontală, paralelă la axa OV.

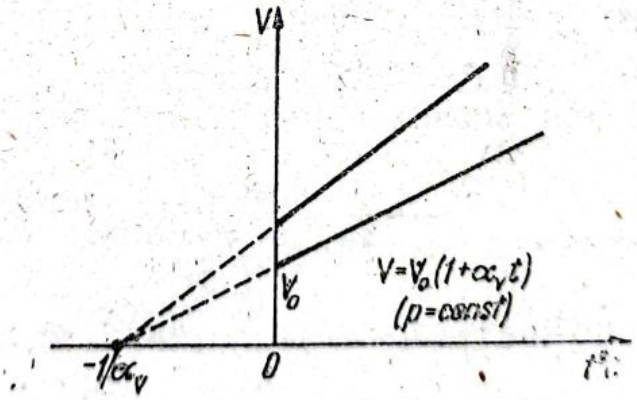


Fig. 2.2

3. **Legea Charles** descrie variaţia izocoră a presiunii unei mase date de gaz.

$$p = p_0(1 + \alpha_p t), \qquad V = \text{const.} \tag{2.43}$$

unde coeficientul termic al presiunii α_p variază puţin de la un gaz la altul şi este apropiat de α_v ; $\alpha_p \approx 1/273\ \text{K}^{-1}$

Scanned with CamScanner

În diagrama $p - t$ legea se reprezintă printr-o dreaptă care extrapolată taie axa Ot la temperatura $t_0 = -1/\alpha_p$ (fig. 2.3). În diagrama $p - V$ legea se reprezintă printr-o dreaptă verticală, paralelă la axa Op.

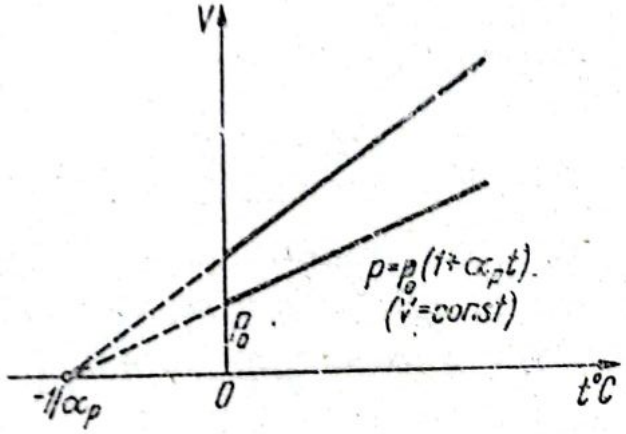


Fig. 2.3

4. **Gazul ideal** sau perfect se definește macroscopic-fenomenologic ca un gaz care se supune exact celor trei legi de mai sus. Atunci rezultă că $\alpha_p = \alpha_v = 1/273{,}15$ grd^{-1}, iar t este temperatura Celsius în scara gazului ideal (coincide cu scara Celsius termodinamică).

Gazele reale se apropie de comportarea gazului ideal la temperaturi înalte și presiuni mici.

Introducînd temperatura absolută $T = t + 1/\alpha = t + T_0$, putem scrie legile de mai sus pentru gazul ideal astfel

$$V_2/V_1 = T_2/T_1, \ (p = \text{const}) \text{ și}$$

$$p_2/p_1 = T_2/T_1, \ (V = \text{const}). \qquad (2.44)$$

5. **Transformarea generală** a unei mase date de gaz ideal :

$$pV = p_0V_0(1 + \alpha t),$$

$$p_2V_2/T_2 = p_1V_1/T_1 = pV/T = \text{const}. \qquad (2.45)$$

Oricare din cele 3 legi particulare ale gazului *ideal* se deduce din celelalte două.

Scanned with CamScanner

6. **Legea lui Avogardo** afirmă că volume egale de gaze diferite aflate la aceeași presiune și temperatură conțin același număr de molecule sau de moli. Altfel spus, volumul molar al gazelor este același pentru toate gazele în aceleași condiții de presiune și temperatură.

7. **Volumul molar** al gazelor în condiții normale de presiune și temperatură (0°C, 1 atm) este

$$V_{\mu 0} = 22{,}4141 \text{ m}^3/\text{kmol}. \qquad (2.46)$$

8. **Ecuația de stare** a gazului ideal

$$pV = \nu RT = NkT, \quad \nu = \frac{m}{\mu} = \frac{V}{V_\mu} = \frac{N}{N_A} \qquad (2.47)$$

unde ν este numărul de moli, m — masa gazului, μ — masa molară (în kg/mol), V_μ — volumul molar (în m^3/mol), N — numărul de particule (molecule) din gaz, R — constanta gazelor

$$R = p_0 V_{\mu 0}/T_0 = 8{,}31451 \text{ J/(mol·K)} =$$
$$= 0{,}0820578 \text{ atm·L/(mol·K)} =$$
$$= 1{,}986 \text{ cal/(mol·K)} = 62{,}3624 \text{ torr·L/(mol.K)}, \qquad (2.48)$$

$$k = R/N_A = 1{,}380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \qquad (2.49)$$

— constanta lui Boltzmann.

9. **Formula presiunii**

$$p = nkT, \qquad n = N/V \qquad (2.50)$$

unde n este concentrația particulelor (numărul particulelor din unitatea de volum).

2.5. Teoria cinetico-moleculară a gazelor

Teoria cinetico-moleculară caută să explice proprietățile *macroscopice* ale corpurilor prin analiza detaliată a proceselor *moleculare* care le stau la bază Mărimile

Scanned with CamScanner

fizice macroscopice au sensul *valorilor medii* ale mărimilor ce caracterizează procesul molecular corespunzător. Astfel, presiunea este efectul mediu al ciocnirilor numărului imens de molecule cu pereţii vasului. Deşi anumite, mărimi caracteristice moleculei sînt întîmplătoare (viteza, energia cinetică), existenţa ansamblului dintr-un număr enorm de molecule duce la legi determinate, statistice (pentru presiune, temperatură). Dacă observăm însă fenomenul la scară mică, microscopică, cu un număr mic de molecule, vom constata abateri de la valorile medii, numite *fluctuaţii* (ale densităţii în gaz, presiunii).

1. **Expresia cinetică a presiunii** (formula fundamentală)

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2},$$

$$\left(\rho = \frac{m}{V}, n = \frac{N}{V} \right) \qquad (2.51)$$

unde m_0 este masa unei molecule, ρ — densitatea; bara deasupra unei mărimi înseamnă valoarea medie. Dar $p = nkT$, deci rezultă

$$\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT,$$

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \qquad (2.52)$$

unde v_T este viteza pătratică medie (viteza termică).

2. **Legea echipartiţiei energiei** pe grade de libertate: fiecărui grad de libertate al unei molecule îi revine în medie (statistică) o energie cinetică (termică) $\frac{1}{2} kT$. Prin numărul gradelor de libertate se înţelege numărul parametrilor independenţi necesari pentru descrierea mişcării moleculei. Fiecărui parametru prin care se exprimă

Scanned with CamScanner

energia potențială îi revine de asemenea în medie o energie $\frac{1}{2}kT$. Astfel un oscilator liniar are energia totală (termică) medie kT.

Modelul moleculei de gaz monoatomic este punctul material cu 3 grade de libertate (de translație), modelul moleculei de gaz biatomic — două puncte materiale (nucleele atomilor) la distanță fixă între ele (ca o halteră) cu 5 grade de libertate (3 translație + 2 rotație). O moleculă poliatomică rigidă are 6 grade de libertate (3 translație + 3 rotație). La moleculele poliatomice, la temperaturi înalte, apar grade de libertate de vibrație.

Legea echipartiției energiei pe grade de libertate este valabilă la temperaturi suficient de înalte. Notînd cu i numărul gradelor de libertate, energia cinetică medie totală a unei molecule va fi

$$\overline{\varepsilon}_c = \frac{i}{2}kT. \tag{2.53}$$

3. Din punct de vedere cinetic **gazul ideal** (perfect) este gazul pentru care se pot neglija forțele de interacțiune dintre molecule (inclusiv dimensiunile proprii ale moleculelor), deci se poate neglija energia potențială ε_p, adică $|\varepsilon_p| \ll \varepsilon_c$. Această condiție este îndeplinită la temperaturi înalte (ε_c mare) și la presiuni mici ($|\varepsilon_p|$ mic).

Prin urmare, energia internă a gazului ideal este formată numai din energia cinetică a moleculelor

$$U = N\overline{\varepsilon}_c = N\frac{i}{2}kT = \upsilon\frac{i}{2}RT = \frac{i}{2}pV. \tag{2.54}$$

Legea lui Joule: energia internă a gazului ideal depinde numai de *temperatură*: $U = U(T)$.

4. **Distribuția moleculelor după viteze** (Maxwell, 1859):

$$\mathrm{d}n(v) = n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m_0v^2/(2kT)}\, 4\pi v^2 \mathrm{d}v = nf(v)\mathrm{d}v \tag{2.55}$$

Scanned with CamScanner

unde $dn(v)$ este numărul de molecule din unitatea de volum care au modulul vitezei cuprins în intervalul infinitezimal $(v, v + dv)$, m_0 — masa unei molecule, $f(v)$ — funcţia de distribuţie (densitatea de probabilitate) (fig. 2.4). Aria totală mărginită de curba $f(v)$ şi axa Ov este 1 (condiţia de normare): $\int_0^\infty f(v)dv = 1$.

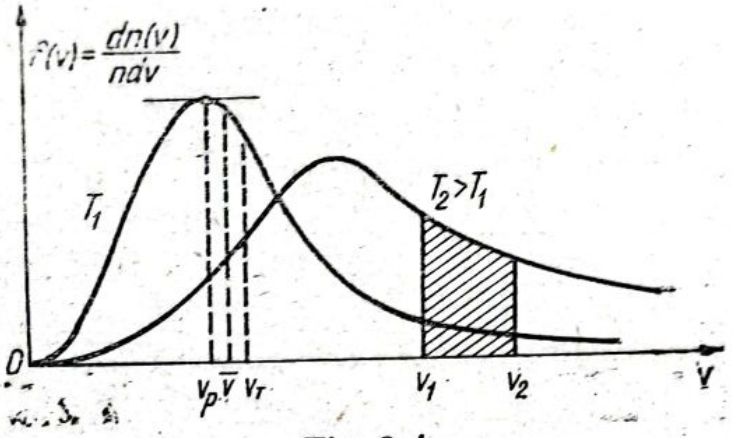


Fig. 2.4

Aria mărginită de curba $f(v)$, două ordonate $v_{1,2}$ şi axa Ov reprezintă numărul relativ de molecule cu modulul vitezei cuprins între v_1 şi v_2.

Viteza cea mai probabilă sau de maximă probabilitate corespunde maximului lui $f(v)$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \qquad (2.56)$$

Viteza medie

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad (2.57)$$

Introducînd viteza redusă $u = v/v_p$, obţinem forma redusă (universală) a funcţiei de distribuţie a moleculelor după viteze reduse

$$dn(u) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du. \qquad (2.58)$$

Scanned with CamScanner

5. **Numărul mediu de molecule** care lovesc unitatea de suprafaţă a peretelui în unitatea de timp este

$$N_0 = \frac{1}{4} n\bar{v}. \tag{2.59}$$

Numărul mediu de ciocniri în unitatea de timp (frecvenţa de ciocnire)

$$z = \sqrt{2}\pi\sigma^2\bar{v}n, \qquad (n = N/V) \tag{2.60}$$

unde σ este diametrul moleculei.

Timpul mediu între două ciocniri succesive

$$\tau = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\bar{v}n}. \tag{2.61}$$

Drumul liber mediu

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{z} = \bar{v}\tau = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{m_0}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho}. \tag{2.62}$$

6. **Distribuţia moleculelor după coordonate** (Boltzmann)

$$dN(x, y, z) = \text{const. } e^{-\varepsilon_p/(kT)}\, dV \tag{2.63}$$

sau

$$\rho(x, y, z) = \text{const. } e^{-\varepsilon_p/(kT)}$$

unde $dN(x, y, z)$ este numărul de molecule care au coordonatele cuprinse în intervalele infinitezimale $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, $(z, z + dz)$, adică în elementul de volum $dV = dxdydz$ situat în punctul (x, y, z), $\varepsilon_p(x, y, z)$ este energia potenţială a moleculei, ρ — densitatea. Constanta se determină din condiţia de normare.

7. **Formula barometrică** dă distribuţia în înălţime a densităţii aerului sau a presiunii (la temperatură constantă)

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu gh/(RT)}, \quad p = p_0 e^{-\mu gh/(RT)} \tag{2.64}$$

unde $\mu \approx 29$ kg/kmol este masa molară a aerului.

Scanned with CamScanner

8. **Fenomene de transport** în gaze: a) *Difuzia* constă într-un transport de substanţă (de masă) în direcţia în care există o variaţie de densitate sau de concentraţie. Cantitatea de substanţă de masă dm care trece prin difuzie în timpul dt printr-un element de suprafaţă dS, aşezat perpendicular pe direcţia (Ox) de variaţie a densităţii ρ, este dată de legea lui A. Fick

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dS\,dt = -D\,\text{grad}\,\rho\,d\vec{S}\,dt,$$

$$[D] = \frac{m^2}{s} \qquad (2.65)$$

unde ρ este densitatea parţială a gazului care difuzează şi D — difuzivitatea. La gaze D are expresia (după Maxwell)

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda, \quad (\lambda - \text{drumul liber mediu}). \qquad (2.66)$$

La gaze în condiţii obişnuite $D \sim 10^{-5}$ m^2/s. (2.67.)

b) *Vîscozitatea*, despre care s-a mai vorbit în § 1.9.3.

La gaze η (coeficientul de vîscozitate) are expresia (după Maxwell)

$$\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda\rho = D\rho. \qquad (2.68)$$

La gaze în condiţii obişnuite $\eta \sim 10^{-5}$ daP şi depinde numai de temperatură ca $\sqrt{T}$. Abia la presiuni suficient de joase, cînd λ devine comparabil cu dimensiunile vasului, η începe să scadă odată cu presiunea sau densitatea.

c) *Conductibilitatea termică* constă într-un transport (transfer) de căldură (la gazul ideal, energia cinetică a moleculelor) (fără transport de substanţă) în direcţia în care există un gradient de temperatură. Cantitatea de căldură dQ care trece prin conductibilitate în timpul dt printr-un element de suprafaţă dS aşezat perpendicular

Scanned with CamScanner

pe direcția (Ox) de variație a temperaturii este dată de legea lui Fourier

$$\mathrm{d}Q = -\varkappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = -\varkappa \mathrm{grad}\ T\,\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t,$$

$$[\varkappa] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} \tag{2.69}$$

unde $\varkappa$ este conductivitatea termică. La gaze $\varkappa$ are expresia

$$\varkappa = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda\rho\, c_v K = K\eta c_v,$$

$$K = \frac{1}{4}\left(9\frac{c_p}{c_v} - 5\right). \tag{2.70}$$

La gaze în condiții obișnuite $\varkappa \sim 10^{-2}$ W/(m·K) și depinde numai de temperatură ca $\sqrt{T}$. Abia la presiuni suficient de joase, cînd λ devine comparabil cu dimensiunile vasului $\varkappa$ începe să scadă odată cu presiunea sau densitatea.

2.6. Gaze reale

1. Între molecule se exercită **forțe de atracție**, care predomină la distanțe mari și variază după legea $1/r^7$ (forțe Van der Waals) și **forțe de respingere**, care predomină la distanțe mici și variază aproximativ după o lege $1/r^{13}$. Energia potențială de atracție și energia potențială de respingere se scriu astfel (fig. 2.5)

$$\varepsilon_p^{atr} = -\frac{A}{r^6}, \quad \varepsilon_p^{resp} = \frac{B}{r^{12}}, \quad (A, B - \text{constante}) \tag{2.71}$$

$$(F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\varepsilon_p/\mathrm{d}r).$$

Scanned with CamScanner

2. Ecuaţia lui Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT, \qquad (V_\mu - \text{volumul molar})$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \quad \left(\nu = \frac{m}{\mu}\right) \qquad (2.72)$$

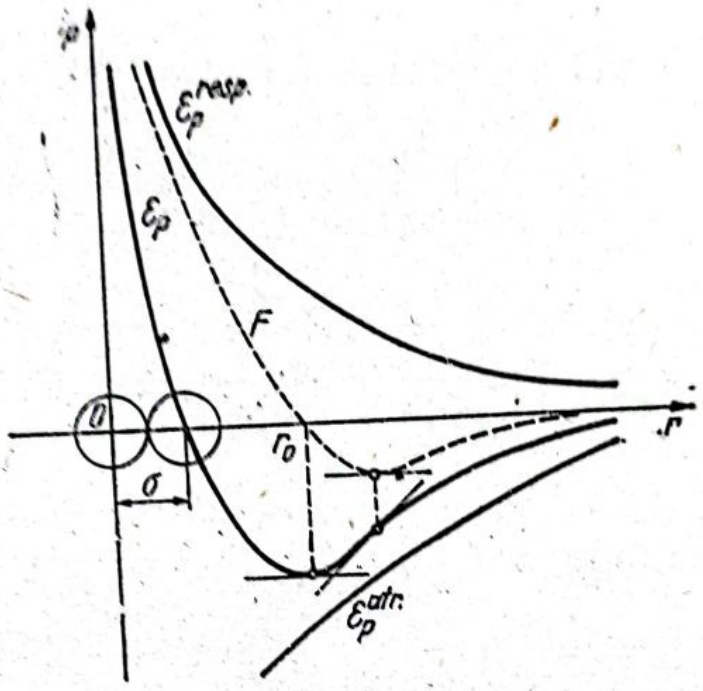


Fig. 2.5

unde a şi b sînt constantele (corecţiile) Van der Waals, $p_i = a/V_\mu^2 = \nu^2 a/V^2$ este presiunea internă (de ordinul miilor de atmosfere pentru starea lichidă), $\nu b = 4V_{pr}$ este covolumul, V_{pr} — volumul propriu al moleculelor.

Izotermele Van der Waals sînt reprezentate în fig. 2.6.

Pe porţiunile a-b izotermele experimentale sînt drepte orizontale (coincid cu izobarele) şi reprezintă procesul de condensare-vaporizare (substanţa se găseşte sub forma a două faze). Porţiunile aa' şi bb' pot fi obţinute experimental în anumite condiţii (vapori suprasaturanţi, lichid supraîncălzit sau rarefiat) (ariile haşurate $aa'o$ şi $bb'o$ sînt egale).

Scanned with CamScanner

3. Punctul C este **punctul critic**: coordonatele sale sînt parametrii critici legaţi de constantele Van der Waals prin

$$T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{\mu c} = 3b,$$

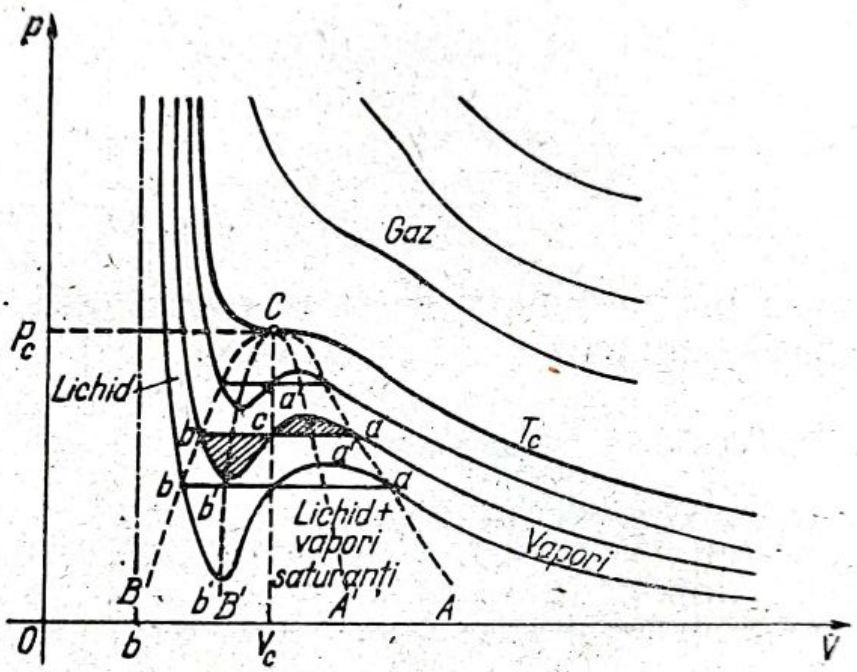


Fig. 2.6

($V_{\mu c}$ — volum molar critic)

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64\,p_c}, \quad b = \frac{RT_c}{8p_c}. \qquad (2.73)$$

Pentru apă: $t_c = 374{,}1°C$, $p_c = 218{,}5$ atm. $V_{\mu c} = 57{,}6$ L/mol, ρ_c (densitate critică) $= 324$ kg/m³; $a = 5{,}47$ atm · (L/mol)² $= 0{,}555$ N.m⁴/mol², $b = 30 \cdot 10^{-6}$ m³/mol. Pentru aer: $T_c = 132{,}5$ K, $p_c = 37{,}6 \cdot 10^5$ N/m²; $a = 1{,}36$ N.m⁴/mol², $b = 36{,}6 \cdot 10^{-6}$ m³/mol.

În punctul critic apare *opalescenţa critică*, căldura latentă de vaporizare $\Lambda = 0$ şi tensiunea superficială $\sigma = 0$. Peste temperatura critică nu poate exista starea lichidă. Densitatea lichidului, aflat în echilibru termic cu vaporii saturanţi, şi densitatea vaporilor saturanţi variază cu temperatura conform fig. 2.7 ($\rho_l > \rho_c > \rho_v$),. Presiunea vaporilor saturanţi creşte puternic cu temperatura (apro-

Scanned with CamScanner

ximativ exponențial) pînă în punctul critic peste care nu există vapori saturanți (fig. 2.8).

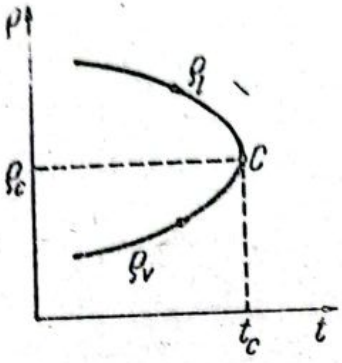


Fig. 2.7

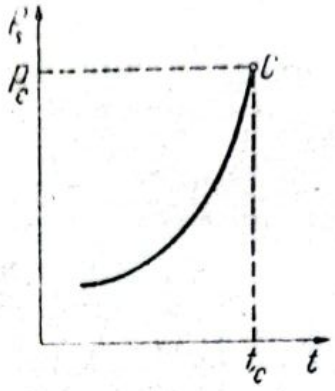


Fig. 2.8

4. Introducînd **parametri de stare reduși** (adică raportați la valorile critice)

$$\pi = p/p_c, \quad \tau = T/T_c, \quad \omega = V/(\nu V_{\mu c}) = V_\mu/V_{\mu c} \qquad (2.74)$$

ecuația Van der Waals capătă forma universală

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \qquad (2.75)$$

5. **Două substanțe se găsesc în stări corespondente** dacă parametrii lor de stare reduși sînt egali. De exemplu stările critice ale tuturor substanțelor sînt coresponènte ($\pi = \tau = \omega = 1$).

Legea stărilor corespondente: Dacă doi parametri reduși (din cei trei π, τ, ω) a două substanțe sînt egali. atunci și al treilea parametru redus trebuie să fie egal (conform ecuației Van der Waals reduse, universale, adică substanțele se găsesc în stări corespondente. Această lege are valabilitate mai extinsă decît ecuația Van der Waals.

6. **Energia internă** a gazului Van der Waals se compune din energia cinetică a moleculelor, ca la gazul ideal, plus energia potențială datorită forțelor de atracție, anume această parte este dată de lucrul mecanic al pre-

Scanned with CamScanner

siunii interne : $p_i \, dV$, astfel încît

$$dU = \nu \frac{i}{2} R dT + \frac{a}{V_\mu^2} dV,$$

$$U = \nu \frac{i}{2} RT - \frac{\nu a}{V_\mu} + \text{const.} \qquad (2.76)$$

Există şi alte ecuaţii propuse pentru descrierea gazelor reale.

2.7. Lichide

Tensiunea superficială este condiţionată de forţele de atracţie exercitate asupra moleculelor din stratul superficial şi orientate spre interiorul lichidului.

1. **Tensiunea superficială** σ se poate defini prin lucrul mecanic izoterm efectuat de pelicula superficială pentru a-şi micşora aria cu unitatea de arie

$$\sigma = -\left(\frac{dW}{dS}\right)_T, \quad [\sigma] = J/m^2 = N/m. \qquad (2.77)$$

Tensiunea superficială reprezintă forţa ce se exercită pe unitatea de lungime a oricărui contur de pe suprafaţa peliculei, perpendicular pe contur şi tangent la suprafaţa peliculei. Tensiunea superficială scade cu creşterea temperaturii şi depinde de puritatea lichidului (în punctul critic $\sigma = 0$).

Pentru apă (la temperatura camerei) : $\sigma = 0{,}073$ N/m, pentru mercur : $\sigma = 0{,}47$ N/m.

2. **Diferenţa** de presiune între două fluide separate printr-o suprafaţă curbată cu razele de curbură principale R_1, R_2 este dată de *formula lui Laplace*

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2.78)$$

Scanned with CamScanner

În cazul unei suprafeţe sferice, respectiv cilindrice, de rază R, avem

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}, \text{(sferă)}; \quad \Delta p = \frac{\sigma}{R}, \text{(cilindru)}. \qquad (2.79)$$

3. **Ascensiunea sau depresiunea capilară** într-un tub de rază r (fig. 2.9), respectiv între două plăci plane paralele la distanţa d între ele

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}, \text{(tub)};$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}, \text{(plăci)} \qquad (2.80)$$

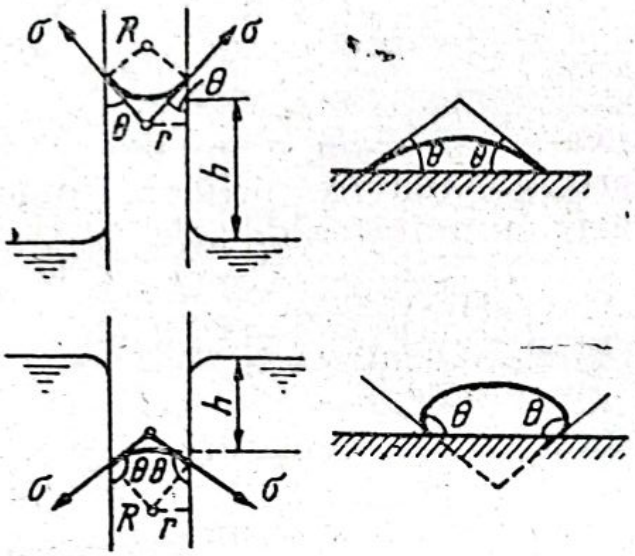


Fig. 2.9

unde θ este unghiul de racordare (de umectaţie); $\theta < \pi/2$ ($\cos\theta > 0$) pentru lichidele care udă peretele şi $\theta > \pi/2$ $\cos\theta < 0$) pentru lichidele care nu udă peretele.

2.8. Elemente de termodinamică

Termodinamica studiază fenomenele sau procesele macroscopice fără a intra în analiza detaliată a proceselor microscopice (moleculare) care le stau la bază,

Scanned with CamScanner

deci abstracție făcînd de structura discretă corpusculară a substanței. Termodinamica se bazează pe noțiuni primare, foarte generale, precum energie, lucru mecanic, căldură, și pe un număr mic de principii, abstrase din experiență și verificate prin consecințele lor. Fizica statistică explică, fundamentează și completează legile termodinamicii. Termodinamica se aplică sistemelor *macroscopice*, adică sistemelor formate dintr-un număr foarte mare (dar finit) de particule (molecule).

1. Prin **sistem** (material) se înțelege orice porțiune din Univers, bine precizată, delimitată fie prin frontiere naturale, fie mintal, pe care o considerăm și o studiem la un moment dat. Exemple: o cantitate de gaz închisă într-un vas, o cantitate de lichid împreună cu vaporii săi închisă într-un vas, radiația electromagnetică dintr-o incintă, o moleculă, o coloană de fluid, o mașină termică.

2. **Starea** unui sistem macroscopic poate fi descrisă macroscopic (adică abstracție făcînd de structura sa discretă corpusculară) printr-un număr mic de parametri numiți parametri macroscopici sau *parametrii de stare*.

Parametrii determinați de pozițiile (coordonatele) corpurilor exterioare (care nu intră în sisemul considerat) se numesc *parametri externi*, de exemplu, volumul, intensitatea unui cîmp aplicat etc.

Parametrii care depind de pozițiile (coordonatele) și mișcarea (vitezele) particulelor din sistem se numesc *parametri interni*, de exemplu, densitatea, presiunea, energia, polarizarea, magnetizarea, etc. Parametrii interni depind și de valorile parametrilor externi.

Mărimile care depind de parametrii de stare se numesc *funcții de stare*, de exemplu, energia internă.

Starea sistemului este *staționară* dacă parametrii de stare nu depind de timp (sînt constanți în timp).

Dacă parametrii de stare de schimbă, variază, avem o *transformare* sau un *proces*.

Scanned with CamScanner

3. **Starea de echilibru** termic sau termodinamic este o stare staţionară, lipsită de orice curenţi staţionari. Parametrii care caracterizează o astfel de stare se numesc *parametri termodinamici*.

Parametrii termodinamici sînt *intensivi* dacă nu depind de masa sau numărul de particule din sistem (de exemplu, presiunea, temperatura) şi sînt *extensivi* sau aditivi dacă sînt proporţionali cu masa sau cu numărul particulelor din sistem (de exemplu, energia, volumul).

Starea de echilibru termodinamic are proprietatea de tranzitivitate şi este determinată nu numai de parametrii externi, ci şi de o mărime intensivă specifică, funcţie de stare, numită *temperatură* (principiul „zero" al termodinamicii).

4. **Un sistem izolat** sau în condiţii exterioare neschimbate ajunge totdeauna după un anumit timp în starea de echilibru termodinamic din care niciodată nu poate ieşi de la sine (*primul postulat al termodinamicii*). Fizica statistică precizează acest postulat în sensul că sînt posibile, dar puţin probabile, fluctuaţii sau abateri spontane de la starea de echilibru care este starea de maximă probabilitate.

5. **La echilibru** toţi parametrii interni ai sistemului sînt funcţii de parametrii externi şi de temperatură (*al doilea postulat al termodinamicii*). Aceste ecuaţii pentru parametrii interni se numesc *ecuaţii de stare*. Energia sistemului, fiind parametru intern, la echilibru este funcţie (univocă) de parametrii externi şi de temperatură, — aceasta este ecuaţia *calorică* de stare, celelalte ecuaţii (pentru ceilalţi parametri interni independenţi) se numesc ecuaţii *termice* de stare. Între ecuaţia calorică şi ecuaţiile termice de stare există anumite relaţii diferenţiale (deduse din principiul II al termodinamicii).

La gazul ideal ecuaţia termică este $p = \nu RT/V$, iar cea calorică $U = \nu C_v T$, $\left(C_v = \frac{i}{2} R\right)$; la gazele reale ecuaţia termică este, de exemplu, ecuaţia Van der Waals (2.72), iar cea calorică (2.76).

Scanned with CamScanner

Altă formulare a postulatului II: la echilibru toți parametrii interni sînt funcții de parametrii externi și de energie (proprietatea de ergodicitate).

6. **Un proces este cuasistatic** sau de echilibru dacă reprezintă o succesiune continuă de stări de echilibru, adică toți parametrii sistemului variază atît de lent, încît sistemul se află tot timpul în stări de echilibru. Procesele cuasistatice se reprezintă grafic printr-o curbă continuă.

În procesele cuasistatice o serie de mărimi practic importante (precum lucrul mecanic, randamentul unui ciclu) au valori limită, maxime posibile, în comparație cu procesele nestatice corespunzătoare.

7. **Sistemele simple** sînt caracterizate de o singură ecuație de stare termică de tip $p = p(V, T)$ și de ecuația calorică $U = U(V, T)$, (de exemplu, gazele).

În acest caz avem identitatea

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1 \qquad (2.81)$$

din care rezultă următoarea legătură dintre *coeficienții termici*

$$\alpha_v = p_0 \beta \alpha_p \qquad (2.82)$$

$\alpha_v = \dfrac{1}{v_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — coficient de dilatare izobară

$\alpha_p = \dfrac{1}{p_0}\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ — coeficient termic de variație izocoră a presiunii

$\beta = -\dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ — coeficient de compresibilitate izotermă ($1/\beta$ — modul de compresibilitate izotermă).

Pentru gazul ideal $\alpha_v = \alpha_p = 1/T_0$, $\beta = 1/p_0$.

Scanned with CamScanner

8. **Schimbul de energie** între două sisteme se poate face în două moduri: prin lucru mecanic (prin intermediul forțelor de interacțiune și a deplasărilor macroscopice), adică cu variația parametrilor externi, și prin schimb de căldură (prin contact termic, datorită unei diferențe de temperatură), adică fără variația parametrilor externi.

Principiul I al termodinamicii (legea generală a conservării și transformării energiei) (fig. 2.10)

$$dQ = dU + dW, \qquad Q = \Delta U + W,$$
$$(\Delta U = U_2 - U_1) \tag{2.83}$$

unde Q este căldura absorbită de sistem ($Q > 0$ — absorbită, $Q < 0$ — cedată de sistem). ΔU — variația energiei interne, W — lucrul mecanic efectuat de sistem ($W > 0$

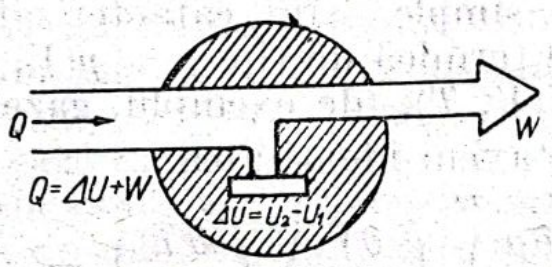


Fig. 2.10

— efectuat de sistem, $W < 0$ — efectuat asupra sistemului). Legea se aplică și proceselor nestatice. Subliniem că lucrul mecanic W și cantitatea de căldură Q *nu sînt funcții de stare*; ele măsoară energia transmisă sau transferată într-un proces și depind de acest proces.

9. **Lucrul mecanic efectuat de gaz** (într-un proces cuasistatic)

$$dW = pdV, \quad W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \tag{2.84}$$

și este reprezentat în diagrama $p - V$ prin aria mărginită de curba procesului $p = f(V)$, axa OV și cele două ordonate $V_{1,2}$ (fig. 2.11).

Scanned with CamScanner

Într-o transformare izorcoră ($V = \text{const}$, $dV = 0$), $W = 0$. Într-o transformare izobară ($p = \text{const}$), $W = p(V_2 - V_1)$. Într-o transformare izotermă a gazului ideal

$$W = \nu RT \ln (V_2/V_1) = \nu RT \ln (p_1/p_2). \qquad (2.85)$$

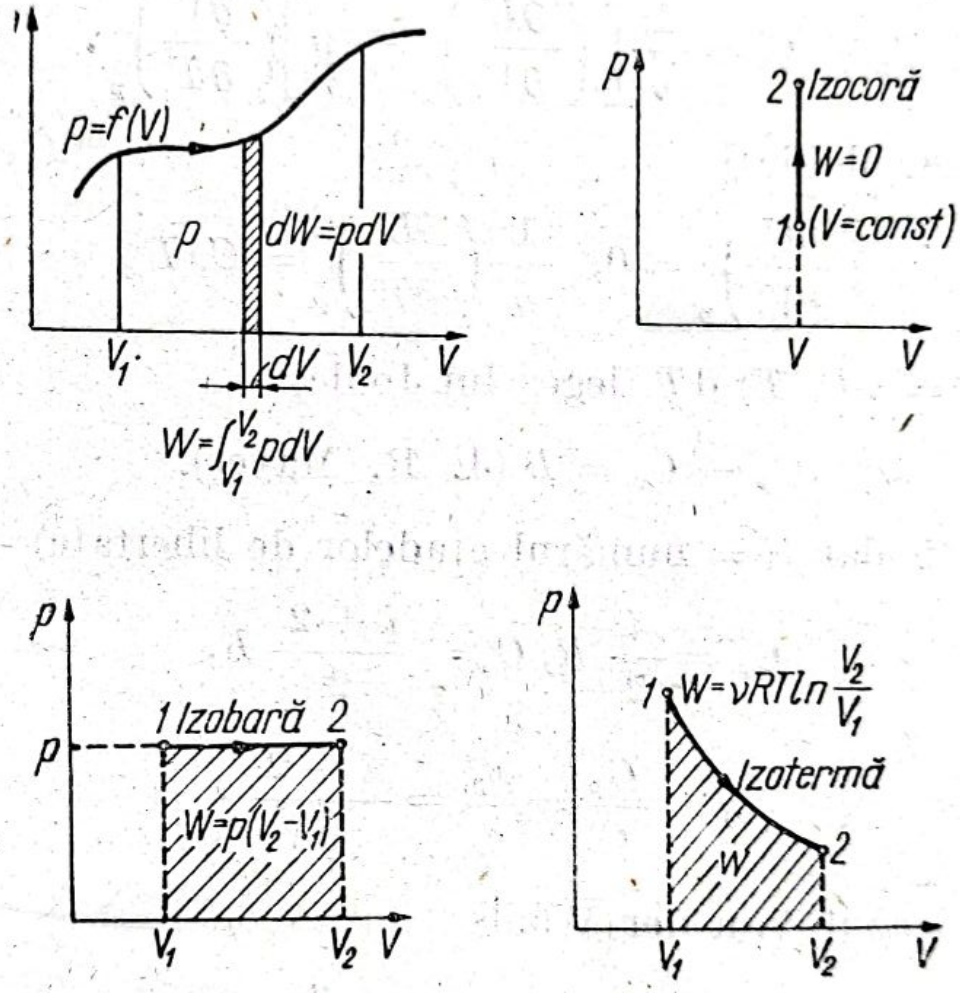


Fig. 2.11

10. Căldurile molare. Ecuația calorică $U = U(T, V)$ diferențiată și principiul I dau

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV$$

de unde căldura molară la volum constant

$$C_v = \frac{1}{\nu}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad (dV = 0) \qquad (2.86)$$

Scanned with CamScanner

și căldura molară la presiune constantă

$$C_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \qquad (2.87)$$

unde $H = U + pV$ este *entalpia*, sau altfel

$$C_p - C_v = \frac{1}{\nu}\cdot\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \qquad (2.88)$$

Pentru gazul ideal

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = 0, \quad \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_v(T),$$

$$\mathrm{d}U = \nu\, C_v(T)\,\mathrm{d}T \text{ (legea lui Joule)} \qquad (2.89)$$

$$C_p - C_v = R \text{ (J. R. Mayer).}$$

În particular (i = numărul gradelor de libertate)

$$C_v = \frac{i}{2}R,\ C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}. \qquad (2.90)$$

Pentru gazul Van der Waals

$$\mathrm{d}U = \nu C_v(T)\mathrm{d}T + \frac{a}{V_m^2}\mathrm{d}V,$$

$$C_p - C_v = \frac{R}{1 - \dfrac{2\nu a}{RT}\dfrac{(V-\nu b)^2}{V^3}} \approx$$

$$\approx R\left(1 + \frac{2\nu a}{RTV}\right) = R + \frac{2\nu a}{TV}. \qquad (2.91)$$

11. Sistemul suferă o transformare adiabatică dacă nu schimbă căldură cu mediul exterior. Ecuaţia tansfor-

Scanned with CamScanner

mării adiabatice a gazului ideal este (fig. 2.12)

$$pV^{\gamma} = \text{const (Poisson)} \quad \text{sau} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

sau

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.} \tag{2.92}$$

$\gamma = C_p/C_v = c_p/c_v$ — exponentul adiabatic.

Căldurile molare la gazul ideal

	$C_v = \frac{i}{2}R$ J/(mol·K)	$C_p = \frac{i+2}{2}R$ J/(mol·K)	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$
Monoatomice $i=3$	$\frac{3}{2}R=12,5$	$\frac{5}{2}R=20,8$	$\frac{5}{3}=1,67$
Biatomice $i=5$	$\frac{5}{2}R=20,8$	$\frac{7}{2}R=29,1$	$\frac{7}{5}=1,40$
Poliatomice rigide, $i=6$	$3R=24,9$	$4R=33,3$	$\frac{4}{3}=1,33$

Mai general, o transformare *politropică* a gazului ideal se definește prin ecuația

$$pV^{\varkappa} = \text{const.} \quad \text{sau}$$

$$TV^{\varkappa-1} = \text{const.} \quad \text{sau}$$

$$Tp^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = \text{const.} \tag{2.93}$$

$\varkappa = \text{const.}$ — exponentul politropic.

În particular, $\varkappa = 0$ dă izobara, $\varkappa = 1$ dă izoterma, $\varkappa = \gamma$ dă adiabata și $\varkappa \to \infty$ dă izocora. Politropicele sînt singurele transformări ale gazului ideal cu căldura molară constantă în timpul transformării

$$C_{\varkappa} = C_v \frac{\varkappa - \gamma}{\varkappa - 1} = C_v - \frac{R}{\varkappa - 1}, \tag{2.94}$$

Scanned with CamScanner

($C = 0$ la adiabată, $C \to \infty$ la izotermă).
Lucrul mecanic efectuat de gaz într-o transformare politropică

$$W = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1 - \varkappa} = \frac{\nu R(T_2 - T_1)}{1 - \varkappa} =$$

$$= \frac{p_1V_1}{1 - \varkappa}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\varkappa} - 1\right] \qquad (2.95)$$

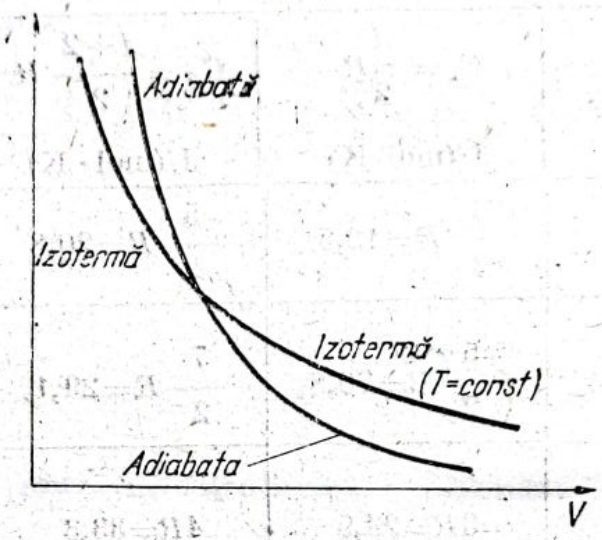


Fig.2.12

și căldura absorbită

$$Q = \nu C_v \frac{\varkappa - \gamma}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma - 1} W = \Delta U \frac{\varkappa - \gamma}{\varkappa - 1}. \qquad (2.96)$$

12. **Un proces este reversibil** dacă se poate produce în ambele sensuri și dacă după revenirea sistemului în starea inițială, nici în sistem nici în mediul exterior nu se produc schimbări remanente.

Procesele cuasistatice sînt reversibile; procesele ireversibile sînt nestatice. Într-adevăr, fiecare stare instantanee a procesului cuasistatic este o stare de echilibru, deci perfect determinată de parametrii exteriori și de temperatură (postulatul II), de aceea variind cuasistatic

Scanned with CamScanner

în sens invers condițiile exterioare, adică parametrii exteriori și temperatura, sistemul va parcurge în ordine inversă aceeași succesiune de stări de echilibru, ca și în sensul direct.

Toate procesele pur mecanice, care decurg fără frecare și fără ciocniri neelastice, sînt reversibile. Procesele cu frecare sînt ireversibile. În general procesele nestatice sînt ireversibile; se cunosc numai două procese nestatice care sînt totuși reversibile: supraconductibilitatea și suprafluiditatea.

Exemple de procese ireversibile (deci și nestatice); 1) Trecerea căldurii de la un corp mai cald la unul mai rece. 2) Destinderea unui gaz în vid. 3) Difuzia gazelor.

13. Sistemul efectuează un **proces închis** sau un ciclu dacă după efectuarea acestuia sistemul revine în starea inițială. Ciclul se numește *direct* dacă sistemul efectuează lucru mecanic pozitiv pe seama unei călduri absorbite (mașinile termice, fig. 2.13, *a*) și *invers*, dacă sistemul

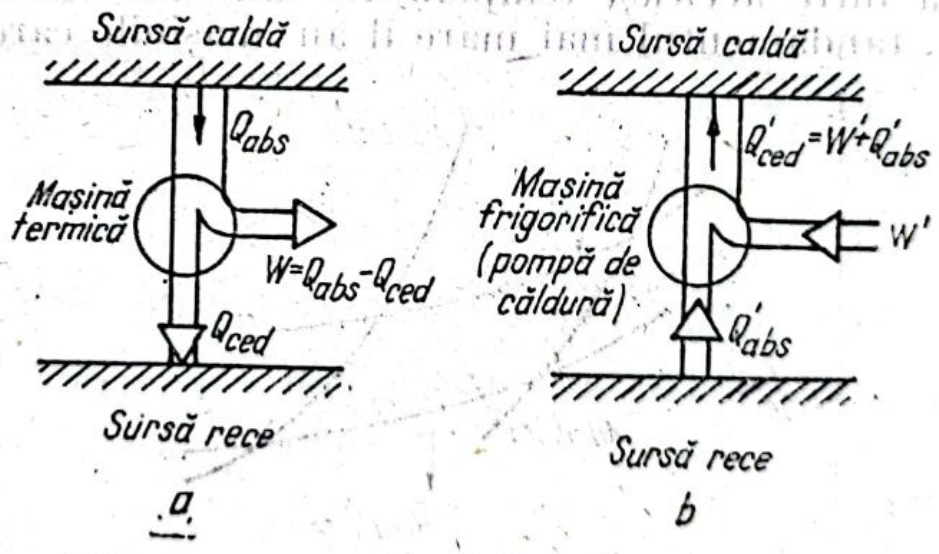


Fig. 2.13

consumă lucru mecanic (mașini frigorifice, pompe de căldură, fig. 2.13, *b*).

Randamentul unei mașini termice

$$\eta = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs} - Q_{ced}}{Q_{abs}}. \qquad (2.97)$$

Scanned with CamScanner

14. **Principiul II al termodinamicii** are mai multe formulări echivalente :

Căldura nu poate trece de la un corp rece la un corp cald *de la sine*, adică fără un consum de lucru mecanic (R. Clausius).

Este imposibilă realizarea unei mașini termice care ar transforma integral în lucru mecanic cantitatea de căldură primită de la o sursă de căldură (adică este imposibilă realizarea unui perpetum mobile de speța II) (Ostwald).

Este imposibil de obținut lucru mecanic prin simpla răcire a unui corp, fără vreo altă acțiune sau efect (W. Thomson),

Este imposibil de construit o mașină periodică care ar produce exclusiv lucru mecanic (ridicarea unei greutăți) și răcirea unei surse de căldură (M. Planck).

15. **Ciclul Carnot** este format din două izoterme și două adiabate (fig. 2.14).

Dintre toate mașinile termice (periodice), care funcționează între aceleași temperaturi date ale surselor de căldură, randamentul mai mare îl au mașinile care funcționează după un ciclu reversibil, iar *randamentul maxim îl are mașina termică cu ciclu reversibil Carnot, al cărui randament nu depinde de substanța de lucru*, anume

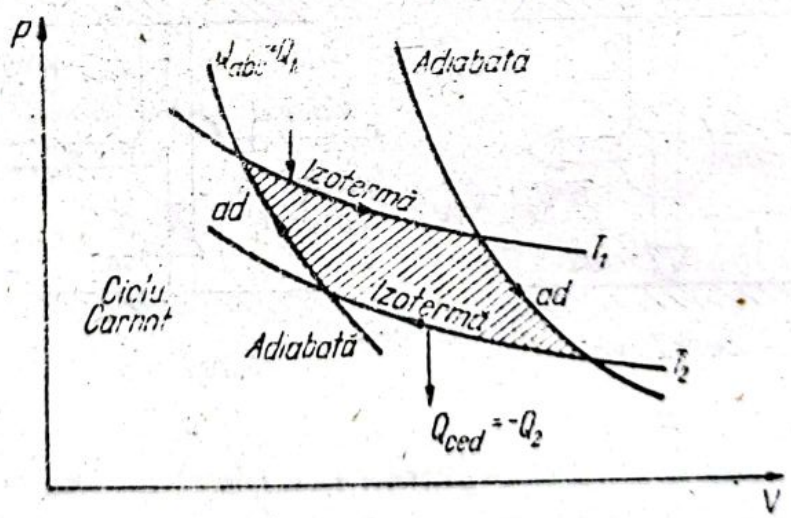


Fig. 2.14

$$\eta = \frac{Q_{abs} - Q_{ced}}{Q_{abs}} = \frac{T_{cald} - T_{rece}}{T_{cald}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.98)$$

Scanned with CamScanner

16. În fig. 2.15 sînt reprezentate ciclurile folosite în tehnică. Randamentul lor este următorul

Otto : $\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$ ($\varepsilon = V_1/V_2$ — gradul de compresie).

(2.99)

Diesel : $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma^{\varepsilon\gamma-1}} \frac{\rho^{\gamma} - 1}{\rho - 1}$, ($\varepsilon = V_1/V_2$, $\gamma = V_3/V_2$).

Cu reacţie : $\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$, ($\varepsilon = V_1/V_2$).

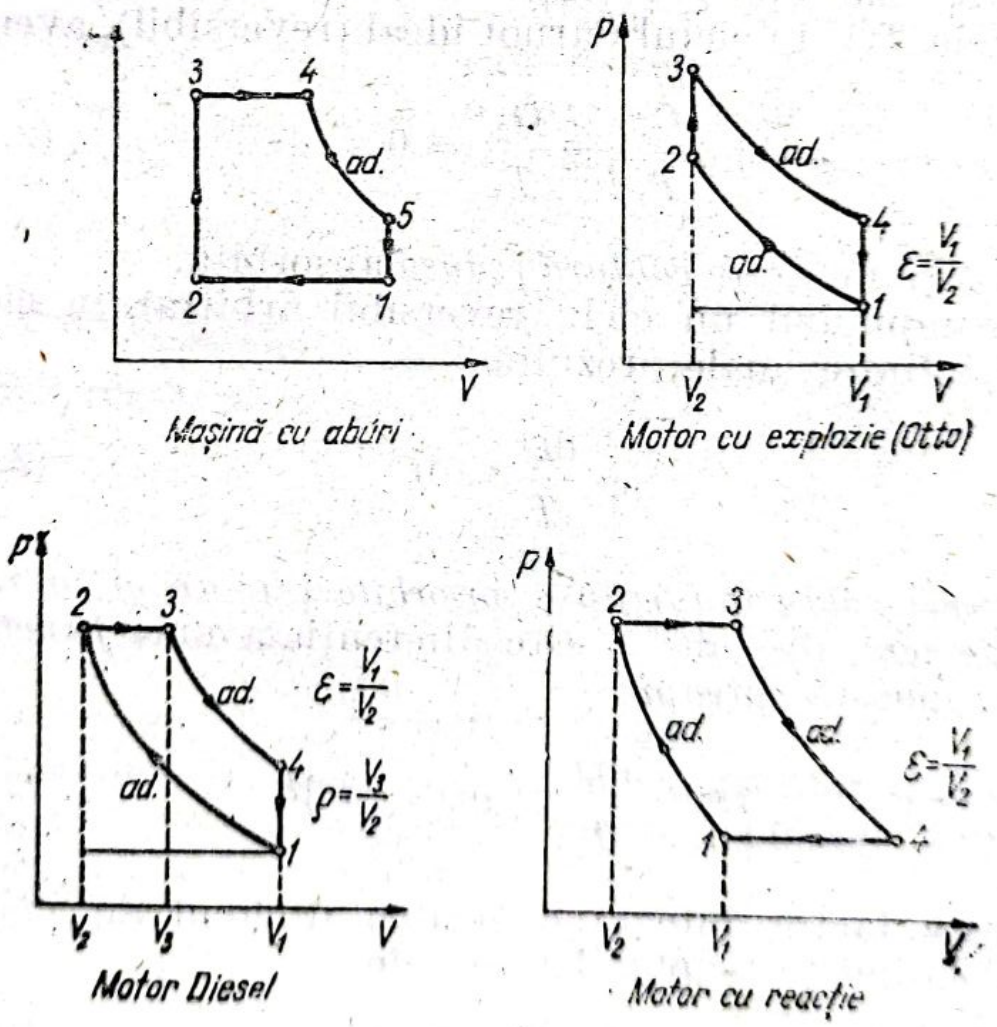


Fig. 2.15

17. **Pentru ciclul ideal Carnot rezultă din (2.98)**

$$\frac{Q_{abs}}{Q_{ced}} = \frac{T_1}{T_2}, \quad T_2 = T_1 \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} \tag{2.100}$$

Scanned with CamScanner

ceea ce permite definirea scării *termodinamice* a temperaturilor : Atribuim unui punct determinat, de exemplu punctului triplu al apei, o temperatură anumită de referinţă, aleasă prin convenţie (273,16 K). Atunci temperatura oricărei surse va fi dată de raportúl căldurilor, cedată şi absorbită, într-un ciclu Carnot ideal funcţionînd între temperatura de referinţă şi temperatura căutată, conform formulei (2.100). Astfel se poate construi o scară termodinamică absolută a temperaturilor, independentă de substanţa de lucru, în principiu oricît de precis.

18. Notînd cu $Q_{1,2}$ căldurile absorbite algebric pe izotermele $T_{1,2}$ în ciclul Carnot ideal (reversibil), avem

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad (2.101)$$

unde Q/T se numeşte *căldură redusă* absorbită.

Descompunînd un ciclu reversibil arbitrar în cicluri Carnot infinitezimale, rezultă

$$\oint \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0 \qquad (2.102)$$

adică *suma căldurilor reduse absorbite într-un ciclu reversibil este zero.* deci $\mathrm{d}Q/T$ este diferenţiala unei *funcţii de stare* S, numită *entropie*

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}, \quad \mathrm{d}Q = T\mathrm{d}S \qquad (2.103)$$

($1/T$ este factor integrand pentru diferenţiala căldurii $\mathrm{d}Q$). Folosind principiul I, obţinem :

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W \qquad (2.104)$$

Pentru un gaz ideal rezultă

$$\Delta S = \nu C_v \ln (T_2/T_1) + \nu R \ln (V_2/V_1),$$

$$S = \nu(C_v \ln T + R \ln V + \text{const.}) \qquad (2.105)$$

Scanned with CamScanner

19. Pentru un ciclu Carnot *ireversibil* (nestatic) randamentul este mai mic decît pentru cel reversibil

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ sau}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0 \qquad (2.106)$$

Considerînd un ciclu ireversibil oarecare și descompunîndu-l în cicluri Carnot ireversibile infinitezimale, obținem că *suma căldurilor reduse absorbite într-un ciclu ireversibil oarecare este negativă* (Clausius).

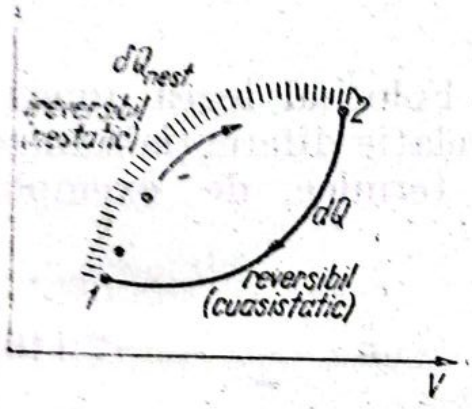


Fig. 2.16

Dacă un sistem trece pe o cale ireversibilă (nestatic) de la o stare de echilibru 1 la alta 2 (fig. 2.16) și îl readucem înapoi în starea 1 pe o cale reversibilă (cuasistatic), trebuie să avem atunci pe ciclu :

$$\sum_1^2 \frac{\delta Q_{nest}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} < 0 \text{ sau}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} > \sum_1^2 \frac{\delta Q_{nest}}{T} \text{ sau}$$

$$TdS > \delta Q_{nest} \qquad (2.107)$$

unde integrala se ia pe drumul reversibil (cuasistatic). Prin urmare, principiul II pentru procese ireversibile (nestatice) se scrie astfel

$$TdS > dU + dW \qquad (2.108)$$

20. Din (2.107) rezultă că entropia unui sistem izolat (adiabatic) într-un proces reversibil rămîne tot timpul constantă ($dQ = 0$, $\Delta S = 0$), iar într-un proces ireversibil crește ($\delta Q_{nest} = 0$, $\Delta S > 0$).

Legea creșterii entropiei ne indică deci sensul desfășurării proceselor în sisteme izolate.

Scanned with CamScanner

21. Sensul profund al entropiei se dezvăluie în fizica statistică. Unei macrostări (descrisă de parametrii macroscopici) îi corespund mai multe microstări ale sistemului, date de distribuţiile coordonatelor şi vitezelor moleculelor. Numărul de microstări care corespund unei macrostări date se numeşte *probabilitate termodinamică*. Entropia se exprimă prin probabilitate termodinamică P astfel (Boltzmann):

$$S = k \ln P, \quad k - \text{constanta Boltzmann.} \tag{2.109}$$

Legea creşterii entropiei oglindeşte faptul că un sistem izolat tinde spre starea de maximă probabilitate, adică spre starea de echilibru termodinamic.

22. **Aplicaţii ale principiului II.** Folosind legea fundamentală (2.104) se poate stabili o relaţie diferenţială între ecuaţia de stare calorică şi cele termice, de exemplu pentru un sistem simplu (gaz):

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \cdot \tag{2.110}$$

Atunci (2.88) devine

$$C_p - C_v = \frac{1}{\nu} T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\beta} V_{\mu 0} T \alpha_v^2, \tag{2.111}$$

deci se calculează numai cu ajutorul ecuaţiei termice de stare.

Tot din (2.104) rezultă că lucrul mecanic efectuat de un sistem într-o transformare *izotermă* este egal cu descreşterea *energiei libere* F

$$(\mathrm{d}W)_T = -\mathrm{d}F, \quad F = U - TS \tag{2.112}$$

aşa cum într-o transformare adiabatică lucrul mecanic este egal cu descreşterea energiei interne. De exemplu, tensiunea superficială σ (2.77) reprezintă variaţia *energiei libere* a peliculei superficiale atunci cînd aria ei creşte cu unitatea de arie.

Scanned with CamScanner

23. În sfîrșit, pentru transformările de fază avem **ecuația Clapeyron—Clausius**

$$T\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\lambda}{v_2 - v_1} \tag{2.113}$$

unde λ este căldura latentă specifică (sau molară) de trecere de la faza 1 la faza 2, iar v — volumul specific (sau molar) al fazei respective.

Termodinamica are numeroase aplicații în multe domenii ale fizicii (de exemplu, în chimia fizică).

Astăzi se dezvoltă termodinamica și fizica statistică a proceselor ireversibile.

Scanned with CamScanner

3.

ELECTRICITATEA

3.1. Electrostatica

1. **Legea lui Coulomb**: două sarcini electrice q_1 și q_2, punctiforme în raport cu distanța r dintre ele, plasate într-un mediu cu permitivitate relativă ε_r, interacționează cu o forță (fig. 3.1)

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{u}, \qquad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \tag{3.1}$$

unde: $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ este vectorul unitate al vectorului distanță, $\vec{r}$,

$\varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon$ — permitivitatea absolută a mediului izolant,

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{F}{m}$ — permitivitatea absolută a vidului, $\varepsilon_r = 1$. Sarcina q se exprimă în coulombi (C), iar r în metri (m) și rezultă forța F în newtoni.

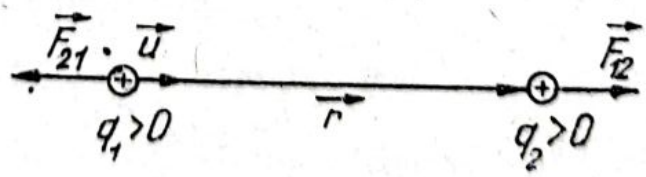


Fig. 3.1

2. **Intensitatea cîmpului electric** produs de o sarcină punctiformă q într-un punct situat la distanța r de sarcină

Scanned with CamScanner

rezultă din expresia forței lui Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}. \tag{3.2}$$

Cînd există mai multe sarcini punctiforme, intensitatea cîmpului electric total într-un punct M este egală cu suma vectorială a intensităților cîmpurilor produse separat de fiecare din aceste sarcini dacă ar fi singură în spațiul considerat (principiul suprapunerii)

$$\vec{E} = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_k^2}\vec{u}_k.$$

Intensitatea cîmpului electric creat de o distribuție uniformă de sarcini pe un (a) fir rectiliniu foarte lung, (b) plan conductor infinit și o (c) sferă de rază R

(a) $$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} \tag{3.3}$$

unde $\tau = \frac{dQ}{dl}$, dl fiind elementul de linie, r — distanța de la fir la punctul considerat;

(b) $$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \tag{3.4}$$

σ este densitatea superficială de sarcină existentă pe ambele fețe ale planului conductor;

(c) $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{3.5}$$

pentru $r > R$.

În cazul unui conductor electrizat, în echilibru electric, izolat în spațiu, intensitatea cîmpului electric într-un punct aflat în interiorul corpului și în imediata vecinătate a suprafeței (fig. 3.2) are, respectiv, expresiile

$$E_i = 0 \tag{3.6}$$

Scanned with CamScanner

(condiția de echilibru electrostatic pentru conductorii neaccelerați și omogeni, încărcați electric) și

$$E_e = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (3.7)$$

(teorema lui Coulomb).

Unitatea de cîmp este $\frac{\text{volt}}{\text{metru}}$.

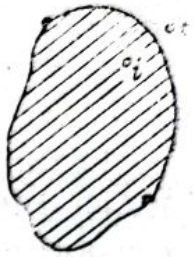


Fig. 3.2

Exemple numerice. a) Intensitatea cîmpului electric al Pămîntului în apropierea suprafeței sale este aproximativ $100 \frac{V}{m}$ b) Intensitatea cîmpului electric în atomul de hidrogen la o distanță corespunzătoare razei „orbitei" electronice este $57{,}6 \cdot 10^{10} \frac{V}{m}$. c) Intensitatea cîmpului electric pentru care se produce străpungerea electrică a aerului este $3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} = 30 \frac{kV}{cm}$.

3. Generatorul electrostatic Van de Graaff. Generatorul electrostatic (fig. 3.3) este folosit în prezent pentru

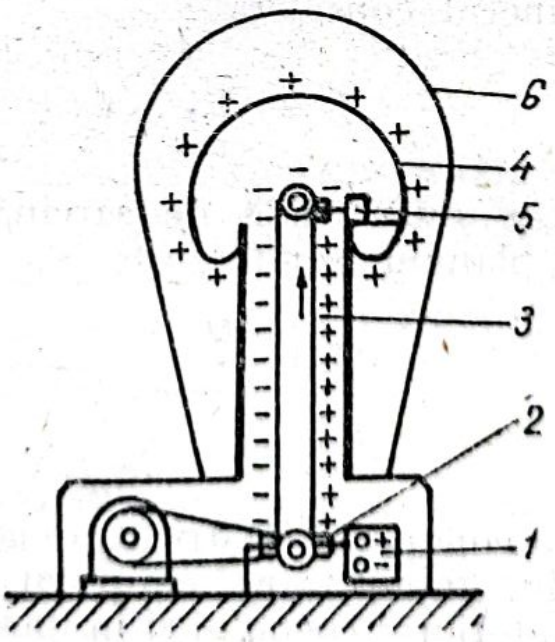


Fig.3.3

realizarea acceleratoarelor directe cu energia maximă pe care o permite acest sistem de accelerare, de 6 — 8 MeV.

Scanned with CamScanner

Principiul de funcţionare se bazează pe transformarea energiei mecanice în energie electrică, prin transportul de sarcini electrice libere dintr-o regiune cu potenţial scăzut, la un electrod de potenţial ridicat, care le acumulează. Tensiunea ($\sim$ 20 kV) redresorului *1*, aplicată unui pieptene *2* format din fire subţiri de oţel aşezate cît mai aproape de bandă, creează un cîmp electric intens între acestea şi bandă. Mediul gazos este ionizat prin efect Corona, astfel că apare un transport de sarcini care se depun pe banda izolantă *3*. Banda transportă electricitatea colectată în calota sferică *4* care joacă rolul de cilindru Faraday şi electricitatea de pe bandă ajunge, printr-un sistem asemănător de ace, la suprafaţa electrodului de înaltă tensiune. Se poate folosi şi în electrodul de înaltă tensiune un redresor *5* care polarizează firele pieptenului colector invers tensiunii aplicate pieptenului depunător, banda se întoarce încărcată cu sarcini de semn contrar şi curentul total de încărcare devine aproape dublu. Pentru a atinge potenţiale mari s-au închis aceste generatoare în tancuri metalice *6* umplute cu un amestec de azot, CO_2 şi freon (CCl_2F_2) care are proprietăţi dielectrice superioare aerului.

4. **Inducţia electrică** este mărimea vectorială egală cu produsul dintre permitivitatea ε a unui mediu izolator (dielectric) şi intensitatea cîmpului electric E în acel mediu, considerat omogen şi izotrop

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3.8}$$

Se măsoară în coulombi pe metru pătrat $\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right)$.

5. **Fluxul de inducţie. Teorema lui Gauss.** Fluxul inducţiei electrice $\vec{D}$ prin suprafaţa $d\vec{S}$ (fig. 3.4) este

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{S} = D dS \cos\alpha \tag{3.9}$$

Dacă suprafaţa *S* cuprinde (închide) un sistem de sarcini punctiforme *qh* atunci, conform principiului supra-

Scanned with CamScanner

punerii

$$\Psi = \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma_h q_h = Q_{int} \qquad (3.10)$$

Fluxul vectorului inducție electrică a unui cîmp electrostatic printr-o suprafață închisă este numeric egal cu suma sarcinilor electrice punctiforme care se află în interiorul suprafeței considerate (teorema lui Gauss).

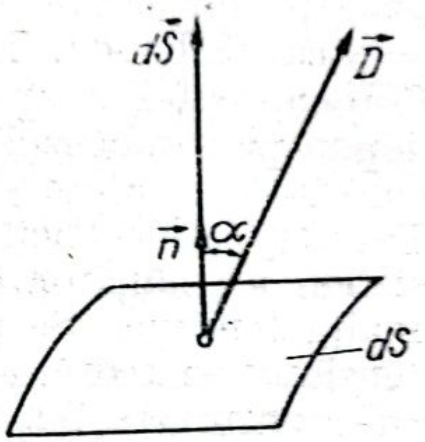


Fig. 3.4

6. Presiunea electrostatică. Forța la care este supus un element dS de pe suprafața unui conductor electrizat este

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} dS,$$

de unde $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}$.

Dar cîmpul electric în apropierea unui corp electrizat în echilibru electrostatic este, conform teoremei lui Coulomb, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, deci presiunea datorită forțelor electrice la suprafața corpului electrizat va fi

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{2}. \qquad (3.11)$$

dF este întotdeauna dirijat în sensul normalei exterioare.

7. Potențialul. Tensiunea electrică. Dacă în cîmpul electric al sarcinii punctiforme pozitive $+q$, fixe, se găsește la o distanță $r = r_1$ o altă sarcină punctiformă foarte mică $+q_0$ asupra acesteia acționează, conform relației (3.2), forța cîmpului electric

$$F = Eq_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} q_0.$$

Sub acţiunea acestei forţe sarcina $+q_0$ se deplasează dincolo de limitele cîmpului, adică pînă la infinit; energia cîmpului sarcinii $+q$ se va micșora cu o valoare egală cu cea a lucrului mecanic

$$L_1 = q_0 \int_{r_1}^{\infty} E \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} q_0$$

(dr — deplasarea infinitezimală de-a lungul liniei de forţă electrică).

Raportul dintre L_1 și valoarea sarcinii q_0 definește potențialul punctului dat al cîmpului electrostatic creat de sarcina q

$$V_1 = \frac{L_1}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1}. \qquad (3.12)$$

Potențialul electrostatic într-un punct oarecare al unui cîmp electrostatic este numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului pentru deplasarea sarcinii pozitive egale cu unitatea, din punctul considerat pînă la infinit

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}. \qquad (3.13)$$

Prin deplasarea sub acţiunea forţelor cîmpului a sarcinii $+q_0$ din punctul 1 din punctul 2 (fig. 3.5), indiferent de drumul parcurs, se produce lucrul mecanic L_{12}, egal cu micșorarea rezervei de energie potenţială a

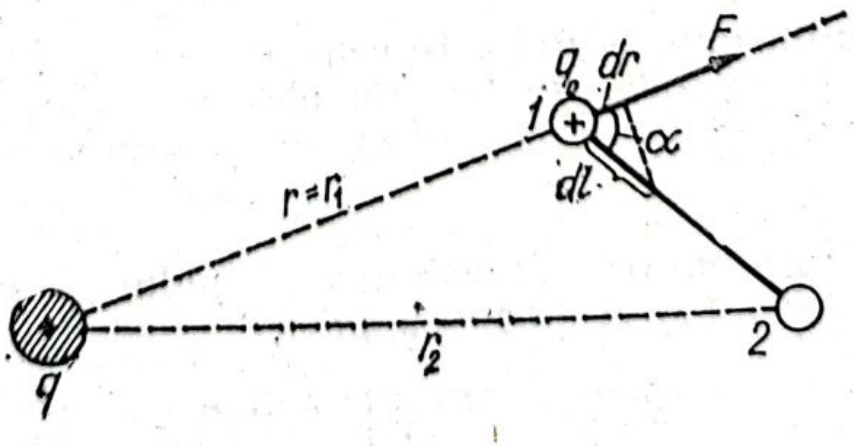


Fig. 3.1

Scanned with CamScanner

cîmpului

$$L_{12} = q_0 \int_{r_1}^{r_2} R\,dr = q_0(V_1 - V_2). \qquad (3.14)$$

Deci: lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unei sarcini într-un cîmp electrostatic este egal cu produsul dintre sarcină și diferența potențialelor dintre punctele între care se deplasează sarcina.

Relația (3.14) este generală indiferent dacă sarcina se mișcă în vid, într-un dielectric sau într-un conductor oarecare.

Din (3.14) rezultă

$$V(r_2) = V(r_1) - \int_{r_1}^{r_2} E\,dr. \qquad (3.14')$$

Dacă $V_1 > V_2$, lucrul mecanic este efectuat de forțele cîmpului; dacă $V_1 < V_2$ lucrul mecanic este efectuat împotriva forțelor cîmpului.

În cîmp uniform diferența de potențial (tensiunea) între punctele 1 și 2 este (fig. 3.6)

$$U = \vec{E} \cdot \vec{l} = E \cdot l \cos \alpha \qquad (3.15)$$

Unitatea de măsură pentru potențial este voltul (V). Din relația (3.13) rezultă

$$1\,V = \frac{1\,J}{1\,C}.$$

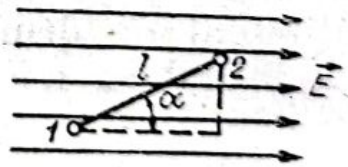


Fig. 3.6

Potențialul Pămîntului este egal cu 0,07 V. În problemele practice ale electricității potențialul Pămîntului se ia ca zero relativ de referință.

8. Legătura dintre intensitatea cîmpului și potențial. Din relațiile (3.12) și (3.13) rezultă

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\,\vec{u}\left[\frac{V}{m}\right]. \qquad (3.16)$$

Scanned with CamScanner

Semnul minus arată că vectorul intensitate a cîmpului electric este orientat în sens opus creşterii potenţialului.

9. **Suprafaţa echipotenţială** reprezintă locul geometric al punctelor din cîmpul electrostatic al căror potenţial are aceeaşi valoare

$$V(x, y, z) = \text{const.}$$

Cîmpul electric în orice punct este normal pe suprafaţa echipotenţială

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial \eta}, \tag{3.17}$$

cîmpul pe direcţia tangentei fiind nul

$$E_t = -\frac{\partial V}{\partial \tau} = 0. \tag{3.18}$$

Pe suprafaţa unui conductor electrizat aflat în echilibru electrostatic (adică $E_i = 0$, conform expresiei (3.6)), pe care se află distribuită sarcina electrică, vectorul intensitate a cîmpului electric este normal, ceea ce indică că aceasta este o suprafaţă echipotenţială

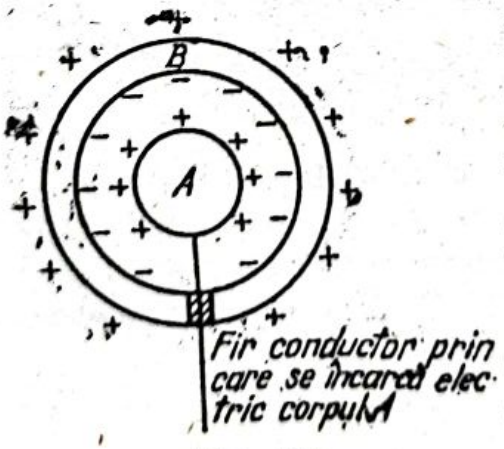


Fig. 3.7

10. Teorema lui Faraday. a) Dacă $+Q$ este sarcina corpului conductor A, atunci apare pe suprafaţa internă a corpului conductor B o sarcină $-Q$, iar pe cea externă o sarcină $+Q$ (fig. 3.7).

b) Distribuţia sarcinii externe $+Q$ este independentă de poziţia corpului A faţă de B. Distribuţia acestei sarcini este astfel încît în interiorul suprafeţei exterioare a corpului B cîmpul să fie nul.

c) Distribuţia sarcinilor pe corpul A şi pe faţa internă a corpului B variază cu poziţia corpului A faţă de B; ea este astfel încît în corpul B şi în afara lui, cîmpul să fie nul.

Scanned with CamScanner

11. **Ecranul electric.** Un corp conductor, gol în interior pus în legătură cu pămîntul, constituie un ecran în ambele sensuri protejînd corpurile din interiorul lui contra acţiunilor electrice exterioare şi corpurile exterioare contra acţiunilor corpurilor electrizate din interior.

12. **Dipolul electric** este reprezentat de o pereche de sarcini punctiforme egale şi de semn contrar $\pm q$, aflate la distanţa l una de alta, foarte mică faţă de distanţa la punctul unde se observă efectul lui sau de unde se acţionează asupra lui (fig. 3.8). Produsul $q\cdot\vec{l} = \vec{p}$ se numeşte moment al dipolului.

a) Potenţialul cîmpului electrostatic produs de dipol într-un punct oarecare M este

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right].$$

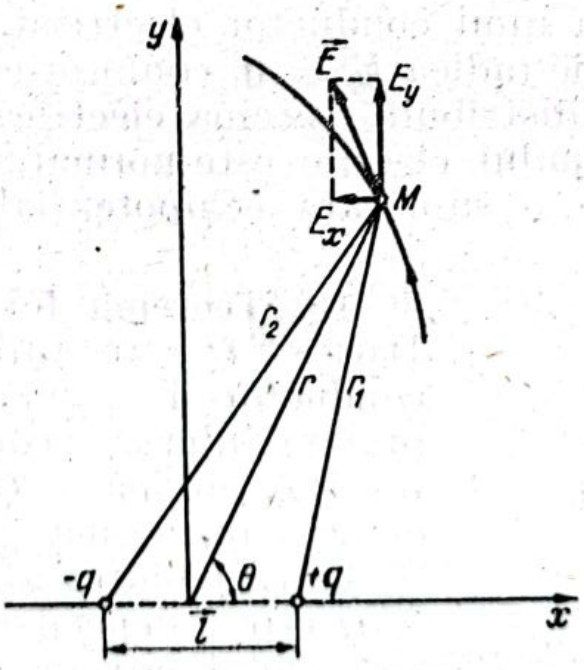


Fig. 3.8

Deoarece $r \gg l$, atunci $r_2 \approx r_1 \approx r$ şi $r_2 - r_1 = l\cos\theta$, expresia potenţialului dipolului devine

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\theta.$$

Scanned with CamScanner

b) Intensitatea cîmpului în punctul M se calculează conform relaţiei (3.16), componentele lui fiind

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\varepsilon r^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3pxy}{4\pi\varepsilon(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3}.$$

Rezultă

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

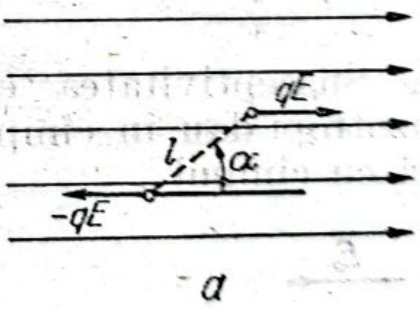
cîmpul unui dipol avînd o simetrie cilindrică în jurul axei lui.

c) Într-un cîmp electric omogen exterior, asupra dipolului acţionează un cuplu de forţe (fig. 3.9, *a*) de moment

$$\mathfrak{M} = 2q \cdot E\frac{l}{2}\sin\alpha = p \cdot E\sin\alpha$$

sau, în scriere vectorială,

$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{p} \times \vec{E}.$$



a

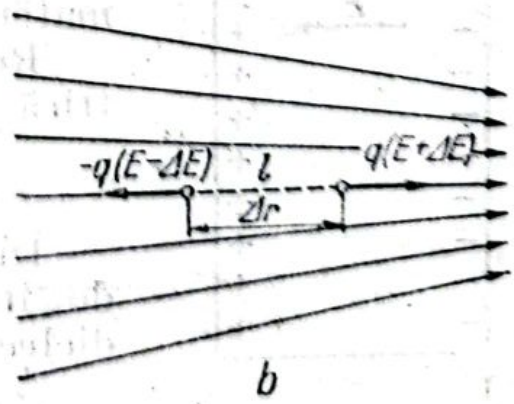
Asupra dipolului aflat într-un cîmp electric neuniform în afară de cuplu acţionează şi o forţă (fig. 3.9, b)

$$F_e = q(E+\Delta E) - q(E-\Delta E) =$$

$$= q(2\Delta E)$$

Sau, pentru $\alpha \neq 0$

$$F_e = p\frac{dE}{dr}\cos\alpha,$$



b

Fig. 3.9

Scanned with CamScanner

13. **Polarizarea dielectrică.** Moleculele unui dielectric sînt echivalente cu niște dipoli electrici ($\vec{p} = q\vec{l}$). Dielectricul este: nepolar dacă, în absența unui cîmp electric exterior, $l = 0$; polar dacă, în aceleași condiții $l \neq 0$.

Polarizarea este mărimea

$$P = \frac{\mathfrak{M}}{V}$$

$\mathfrak{M} = Q_p \cdot d$ fiind *momentul electric* al dielectricului de volum V. Notînd cu S suprafața străbătută normal de liniile de forță electrice, se obține

$$P = \sigma_p;$$

de unde rezultă că polarizarea și densitatea superficială a sarcinilor de polarizare, care apar pe fețele opuse ale dielectricului, sînt numeric egale cînd liniile de forță le străbat perpendicular. Unitatea pentru momentul electric $\mathfrak{M}$ este coulomb ori metru ($C \cdot m$), iar pentru polarizare coulomb pe metru pătrat $\left(\frac{C}{m^2}\right)$.

14. **Susceptivitatea electrică.** Majoritatea dielectricilor izotropi dau în cîmpul electric o polarizare proporțională cu cîmpul

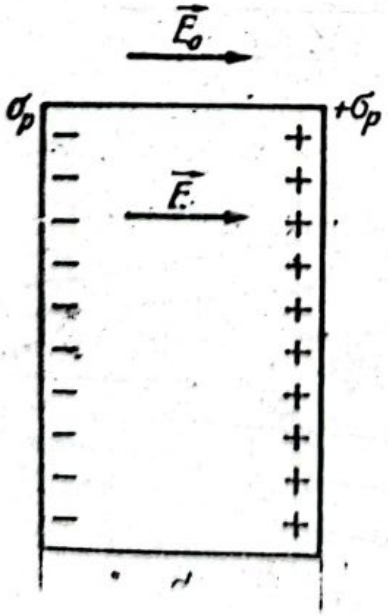


Fig. 3.10

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Mărimea χ se numește *susceptivitate electrică* și este o constantă de material adimensională.

Relația dintre susceptivitatea electrică și permitivitatea relativă este

$$\chi = \varepsilon_r - 1.$$

În funcție de polarizare, cîmpul de inducție într-un punct al unui dielectric omogen și izotrop este

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)E = \vec{D}_0 + \vec{P}.$$

Scanned with CamScanner

15. Refracția liniilor de forță electrice și de inducție la trecerea lor dintr-un dielectric în altul. Se consideră două medii dielectrice cu permitivitățile relative ε_{r1} și ε_{r2}, Σ fiind suprafața de separație între ele (fig. 3.11). Cîmpul electric de intensitate E_1, care face unghiul α_1 cu normala $\vec{n}$ se refractă sub unghiul α_2, corespunzător relațiilor

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \text{ (legea refracției liniilor de cîmp)}$$

și

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$
$$D_2 \cos\alpha_2 = D_1 \cos\alpha_1 + \sigma$$

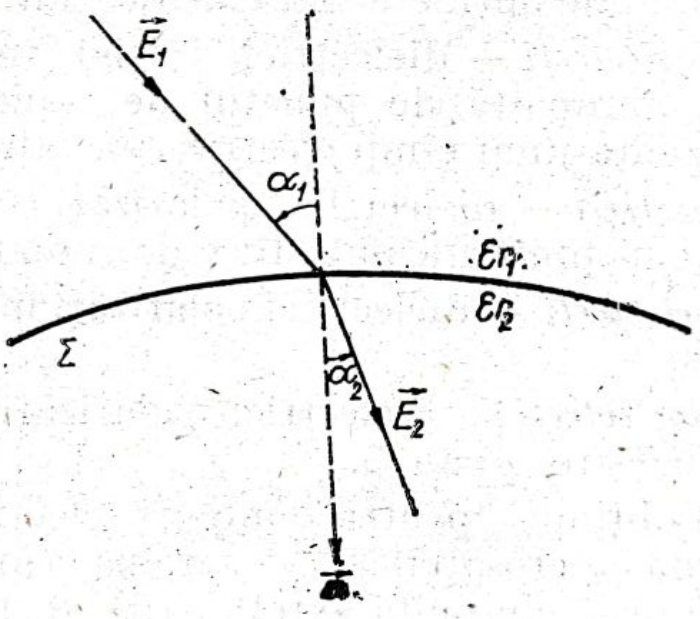


Fig. 3.11

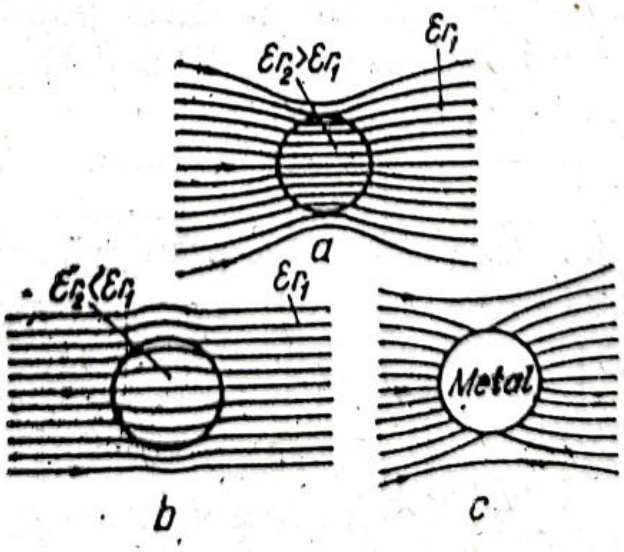


Fig.3.12

Scanned with CamScanner

dacă pe suprafaţa de separaţie există sarcini libere (adevărate) de densitate superficială σ.

În figurile 3.12 a, b se poate observa mersul liniilor de inducţie cînd într-un mediu de permitivitate relativă ε_{r1} este cufundată o sferă de permitivitate relativă ε_{r2}, iar în e cazul sferei de metal.

16. **Electretul** este analogul electric al magnetului permanent, dielectric solid, permanent, polarizat electric (realizat în general sub formă de disc sau plăcuţă dreptunghiulară) purtînd pe una din feţe o sarcină electrică pozitivă iar pe cealaltă o sarcină negativă egală ca valoare.

După modul de obţinere sînt clasificaţi în :

a) *Termoelectreţi* — dielectrici iniţial încălziţi la o temperatură apropiată de punctul de topire şi ulterior răciţi în prezenţa unui cîmp electric constant.

b) *Fotoelectreţi* — dielectrici polarizaţi în cîmp electric constant în prezenţa unui flux de radiaţii luminoase.

c) *Electroelectreţi* — dielectrici polarizaţi în cîmp electric foarte intens.

d) *Pseudoelectreţi* — dielectrici polarizaţi în prezenţa radiaţiilor nucleare α sau β.

Electreţii obţinuţi pentru cîmpuri electrice $E_p < 10$ kV/cm posedă eterosarcină — sarcina care determină o polaritate opusă cîmpului exterior (fig. 3, 13, a).

Electreţii obţinuţi pentru cîmpuri electrice $E_p \geq 10$ kV/cm posedă omosarcină a cărei polaritate este aceeaşi cu cea a cîmpului exterior (fig. 3.13, *b*).

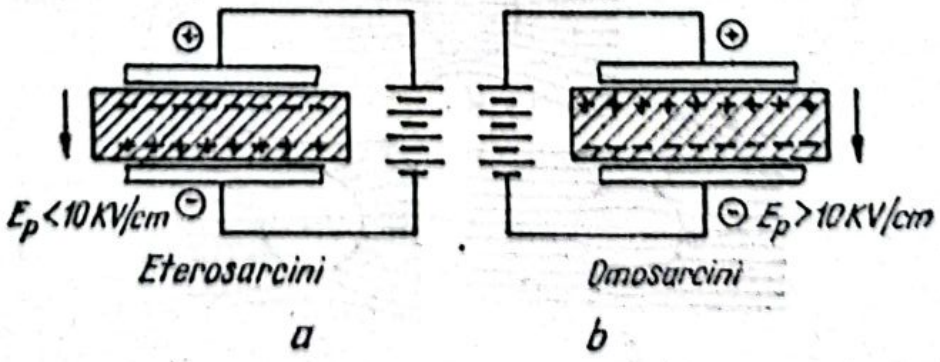


Fig. 3.13

17. **Capacitatea electrică.** Raportul constant dintre sarcina electrică (Q) cu care este încărcat un conductor izolat și valoarea la care se ridică potențialul său (V) se numește *capacitatea electrică* (C)

$$C = \frac{Q}{V}.$$

18. **Condensatori.** Sistemul format din două conductoare, încărcate cu sarcini electrice egale și de semne contrare $+Q$ și $-Q$, se numește *condensator electric.* Mărimea definită de raportul dintre sarcina unuia din conductoare (armături) și diferența de potențial dintre ele se numește *capacitate electrică a condensatorului*

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}. \qquad (3.19)$$

Unitatea de măsură a capacității electrice este faradul

$$1\,F = \frac{1\,C}{1\,V}.$$

a) *Capacitatea condensatorului plan* (fig. 3.14). Din legea fluxului electric (3.9) aplicată suprafeței Σ, observînd că în conductor $\vec{D} = 0$

$$\Psi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint D \cdot dS = D \cdot \Delta S = \Delta Q$$

se obține

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}.$$

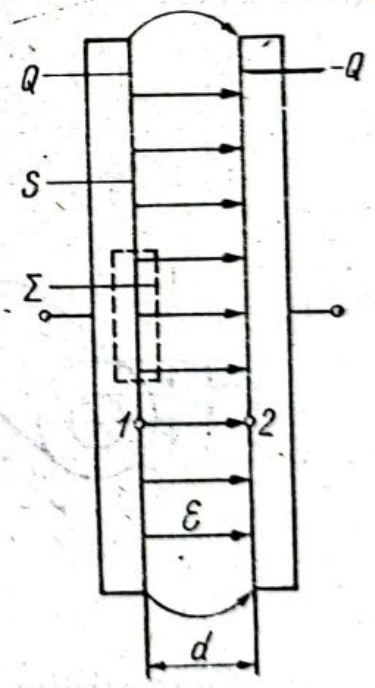


Fig. 3.14

Tensiunea electrică calculată de-a lungul unei linii de cîmp este

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E \cdot dl = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon S}$$

Scanned with CamScanner

de unde, conform relației (3.19), rezultă *capacitatea condensatorul plan*

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

b) *Capacitatea condensatorului cilindric* (fig. 3.15, a)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

c) *Capacitatea condensatorului sferic* (fig. 3.15, b)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

d) *Capacitatea liniei bifilare* (depărtată de pămînt) (fig. 3.15, a)

$$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r}}, \quad r \ll d.$$

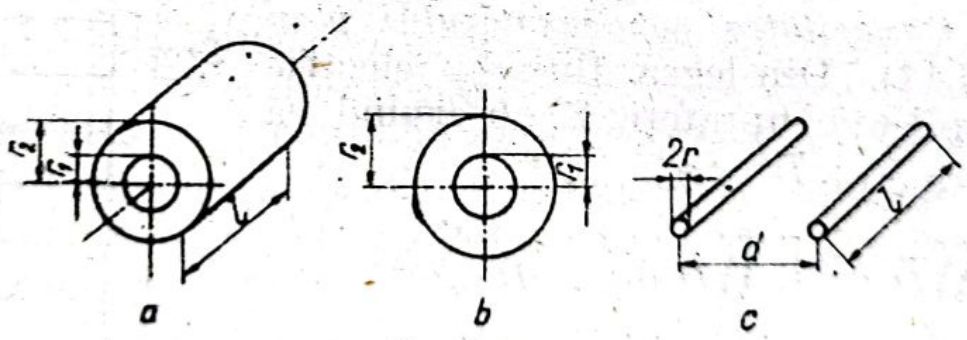


Fig. 3.15

e) *Condensator cu armături plane paralele, dielectricul format din mai multe straturi de permitivități diferite, suprafețele de separație fiind paralele cu armăturile* (fig. 3.16, a). Capacitatea totală echivalentă este

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum_i \frac{d_i}{\varepsilon_{ri}}}$$

Scanned with CamScanner

iar pentru dielectricul multistrat cu suprafețele de separație perpendiculare pe armături (fig. 3.16, b)

$$C = \frac{\varepsilon_0 l}{d} \sum_i \varepsilon_{ri} h_i,$$

l fiind lățimea unei armături a condensatorului plan.

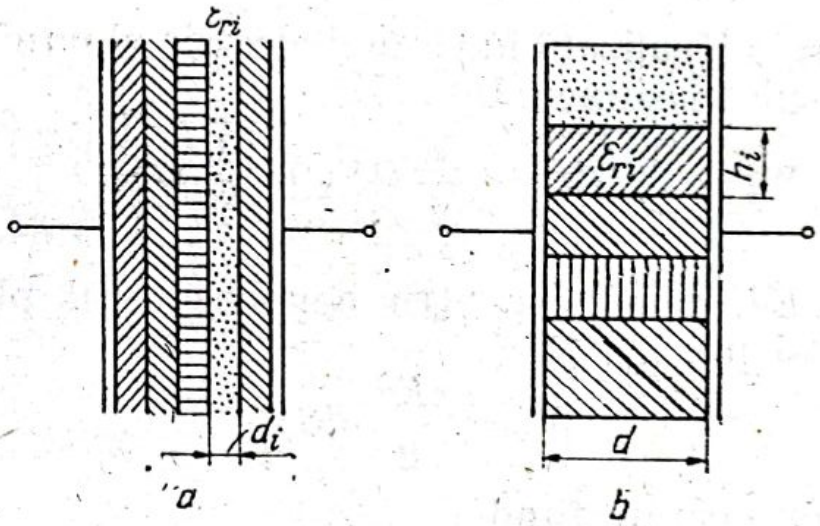
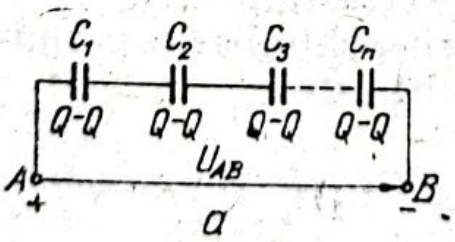


Fig. 3.16

19. Gruparea condensatorilor

a) *în serie* (fig. 3.17, a)

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)$$



sau

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i};$$

b) *în paralel* (fig. 3.17, b)

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)U_{AB}$$

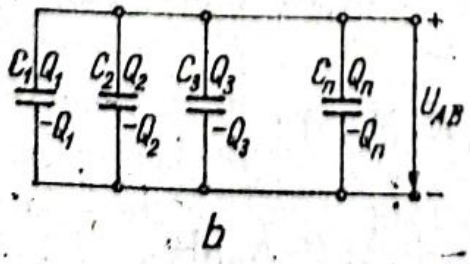


Fig. 3.17

sau

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Scanned with CamScanner

20. Energia electrică a unui conductor încărcat, adică lucrul mecanic cheltuit pentru încărcarea corpului conductor cu sarcina electrică Q_0 pornind din starea neutră și aducîndu-l la potențialul final V_0 este

$$W_e = \int V dQ = C \int_0^{V_0} V dV = \frac{1}{2} Q_0 V_0 \text{ [J]}.$$

21. Energia localizată în cîmpul electric al unui condensator aflat sub tensiunea U

$$W_e = \frac{1}{2} Q V_1 - \frac{1}{2} Q V_2 = \frac{1}{2} Q U.$$

Cum $U = Ed$, rezultă pentru condensatorul plan (caz simplu de calcul)

$$W_e = \frac{\varepsilon E^2}{2} dS$$

densitatea de energie fiind

$$w_e = \frac{W_e}{v} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

relație care este valabilă pentru orice mediu izotrop cît și pentru cazul general al cîmpului neomogen.

22. Variația energiei unui cîmp electrostatic E_0, existînd inițial în volumul $v = v_1 + v_2$, prin schimbarea permitivității în volumul v_2 (fig. 3.18, a, b) este

$$\Delta W = W - W_0 - \frac{1}{2} \int_{v_2} \varepsilon_0 (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}) \vec{E} \cdot \vec{E}_0) \, dv.$$

Cînd în jurul volumului v_2 este spațiu liber ($\varepsilon_{r1} = 1$) expresia devine

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_{v_2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)(\vec{E} \cdot \vec{E}_0) \, dv =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{v_2} \varepsilon_0 \chi (\vec{E} \cdot \vec{E}_0) \, dv = -\frac{1}{2} \int (\vec{P} \cdot \vec{E}_0) dv.$$

Scanned with CamScanner

23. **Teorema forţelor generalizate.** Forţa generalizată X_i (forţă, momentul cuplului, presiune) care se exercită asupra unui corp în cîmpul electrostatic, referitoare la coordonata generalizată x_i a corpului (respectiv — deplasare, unghi, volum), are expresiile

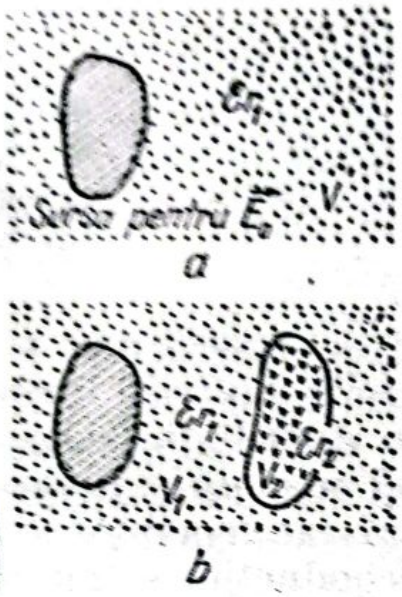


Fig. 3.18

$$X_i = -\left.\frac{dW_e}{dx_i}\right|_{Q=\text{const.}}$$

şi

$$X_i = \left.\frac{dW_e}{dx_i}\right|_{V=\text{const.}}$$

3.2. Electrocinetica

Electrocinetica studiază stările electrice ale conductorilor străbătuţi de un curent electric de conducţie staţionar numit curent continuu. Pentru explicarea apariţiei într-un circuit închis (neramificat) şi a unui curent continuu trebuie considerat şi un cîmp $\vec{E}_i$ astfel încît, pentru circuitul considerat

$$\int_{\Gamma} (\vec{E}_{coul} + \vec{E}_i)\, dl \neq 0.$$

$\vec{E}_i$ este intensitatea cîmpului electric imprimat asociat forţelor neelectrice care menţin o diferenţă de potenţial constantă la bornele sursei (elemente galvanice, acumulatori, generatori mecanco-electrici). Deplasarea sarcinilor prin circuitul închis se face pe seama energiei cheltuite în sursă ca urmare a unor procese fizice specifice la electrozii sursei (de exemplu reacţiile electrochimice care au loc la suprafaţa de contact a electrozilor cu electrolitul — — cazul surselor galvanice).

Scanned with CamScanner

1. Forța (tensiunea) electromotoare a unui generator este definită ca integrala de linie a cîmpului imprimat E_i, definită de la polul negativ (N) la polul pozitiv (P), prin sursă

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

La gol (circuit deschis) $E_i = -E_{coul}$.

Dacă la bornele (electrozii) sursei se conectează un conductor, generatorul „împinge" sarcinile electrice libere în interiorul conductorului stabilind o distribuție staționară a sarcinilor în mișcare. Apare astfel un cîmp în fiecare punct al sistemului (fig. 3.19). În afara generatorului sarcinile din conductor (electronii de conducție) se mișcă sub acțiunea cîmpului coulombian E_{coul}. În interiorul sursei sarcinile sînt acționate atît de E_i cît și de E_{coul}. Energia convertită în căldură în circuit este furnizată de generator, transferul fiind efectuat prin intermediul cîmpului coulombian al sarcinilor distribuite.

Pentru o porțiune $1-2$ de circuit neramificat este valabilă relația

$$I \int_1^2 \rho \frac{\mathrm{d}l}{S} = \int_1^2 \vec{E}_c \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (3.20)$$

unde $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ este intensitatea curentului $\left(\text{măsurată în amperi, } 1\ \mathrm{A} = \dfrac{1\ \mathrm{C}}{1\ s}\right)$, $\mathrm{d}\vec{l}$ – vector, numeric egal cu elementul de lungime $\mathrm{d}l$ de conductor, orientat în sensul curgerii curentului (de la $+$ la $-$) și perpendicular pe secțiunea transversală a conductorului de arie S. În regim electrocinetic staționar, cîmpul elec-

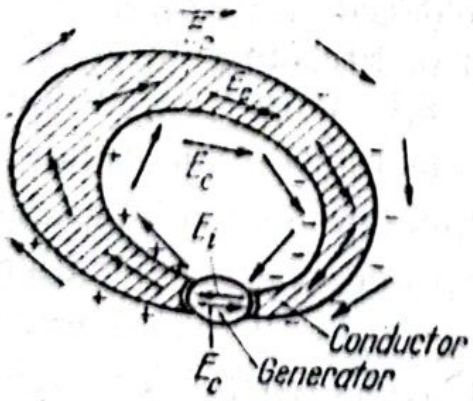


Fig. 3.19

Scanned with CamScanner

tric din interiorul conductorului are proprietăţile cîmpului potenţial cunoscut din electrostatică

$$\int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

unde V_1 şi V_2 sînt potenţialele cîmpului în punctele 1 şi 2.

2. **Tensiunea (căderea de tensiune)** U_{21} **pentru o porţiune de circuit** este mărimea numeric egală cu lucrul mecanic executat de forţele coulombiene şi imprimate pentru a deplasa între secţiunile 1 şi 2 unitatea pozitivă de sarcină electrică

$$U_{21} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{21} \qquad (3.21)$$

unde $\mathcal{E}_{21}$ reprezintă suma algebrică a t.e.m. a surselor intercalate în porţiunea de circuit *1 — 2*. Din relaţia (3.21) reiese că tensiunea şi t.e.m. au ca unitate voltul.

3. **Rezistenţa electrică** a unei porţiuni de circuit

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{21}.$$

Pentru un conductor cilindric omogen ($\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$)

$$R_{21} = \rho \frac{l_{21}}{S} = \frac{l_{21}}{\gamma S};$$

ρ se numeşte *rezistivitatea materialului* conductor. Inversul rezistivităţii se numeşte *conductivitate*. Unitatea de măsură a rezistenţei se numeşte ohm (Ω) şi este rezistenţa unui conductor prin care curentul de un amper determină o cădere de tensiune de un volt

$$1\ \Omega = \frac{1\ V}{1\ A}.$$

Scanned with CamScanner

Unitatea de rezistivitate este ohm ori metru (Ω. m) Mărimea

$$G = \frac{1}{R}$$

se numește *conductanță*. Unitatea pentru conductanță este Ω^{-1}.

Rezistivitatea metalelor și a altor materiale depinde de temperatură liniar (dacă diferențele de temperatură sînt mici), adică

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_0 (t - t_0)]$$

unde ρ_0 și α_0 sînt, respectiv, rezistivitatea și coeficientul de temperatură a rezistivității la temperatura de referință. Pentru metale α_0 este pozitiv. Constantanul, cărbunele, diverse soluții au α_0 negativ. Materialele semiconductoare au o rezistivitate care scade cu temperatura după o lege exponențială. Se cunosc cîteva sute de materiale (metale, aliaje, combinații semiconductoare) caracterizate prin anularea rezistivității lor sub o anumită temperatură critică (0,1 ÷ 10K). Acest fenomen se numește *supraconductibilitate*, descoperit în 1911 la fizicianul olandez Kamerling Onnes.

4. Legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit

$$IR_{21} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{21}$$

sau, conform relației (3.21)

$$U_{21} = IR_{21}$$

Tensiunea pentru o porțiune de circuit este egală cu produsul dintre rezistența ei înmulțită cu intensitatea curentului care o parcurge.

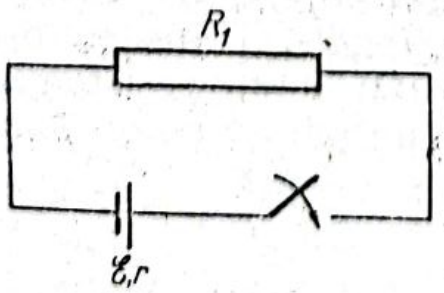


Fig. 3.20

Pentru un circuit neramificat închis $V_1 = V_2$, rezistența totală este $R_{21} = R$ și

$$\mathcal{E} = I \cdot R$$

unde $\mathcal{E}$ este suma algebrică a tuturor t.e.m. existente în circuitul considerat

Scanned with CamScanner

Pentru circuitul din fig. 3.20, *tensiunea la bornele sursei* (pentru circuitul exterior) este

$$U = IR_1$$

unde $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$ și $R_1 = R - r$. Prin urmare

$$U = \frac{\mathcal{E}R_1}{r + R_1} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{r + R_1} = \mathcal{E} - Ir.$$

În cazul circuitului deschis $I = 0$ și $\varepsilon_{21} = V_2 - V_1$.

Pentru aflarea valorii t.e.m. a unei surse trebuie măsurată diferența de potențial la bornele sursei în circuit deschis (la gol).

5. **Legea lui Joule**. Căldura Q degajată la trecerea curentului electric printr-un conductor este direct proporțională cu rezistența R a conductorului, cu pătratul intensității curentului și cu timpul t considerat

$$Q = RI^2t = UIt \text{ [J]}.$$

Puterea electrică dezvoltată prin trecerea unui curent continuu de intensitate I printr-un conductor de rezistență R, la capetele căruia s-a aplicat o tensiune U, este

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \text{ [W]}.$$

6. **Circuite ramificate** *Gruparea rezistorilor*. Rezistența echivalentă R_p a unei grupări în paralel de rezistori și rezistența echivalentă R_s pentru o grupare în serie

$$\frac{1}{R_p} = \sum \frac{1}{R_i}; \quad R_s = \sum R_i.$$

Gruparea surselor : a) T.e.m. a sursei echivalente în cazul legării în serie a n surse de t.e.m. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ și rezistențe interne $r_1, r_2, \ldots, r_n$ este

$$\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_i$$

Scanned with CamScanner

rezistența internă a sursei echivalente fiind

$$r = \sum r_i$$

b) În cazul legării în paralel a n surse identice, fiecare avînd t.e.m. $\mathcal{E}'$ și rezistența internă r', t.e.m. a surse echivalente este

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}'$$

iar rezistența internă totală

$$r = \frac{r'}{n}.$$

7. **Legile lui Kirchhoff.** *a*) *Legea I-a* : într-o rețea electrică, suma algebrică a intensității curenților din laturile legate la același nod este egală cu zero

$$\sum I_i = 0.$$

b) *Legea a II-a* : într-un circuit închis, suma algebrică a căderilor de tensiune este egală cu suma algebrică a t.e.m.

$$\sum R_i I_i = \sum \mathcal{E}_i$$

Diferența de potențial între punctele AB ale unei rețele se determină din relația

$$V_A - V_B = (\sum \mathcal{E}_i - \sum (RI)_i)_{B \to A}$$

8. **Intensitatea curentului debitat de o grupare mixtă de $p = m \cdot n$ surse identice printr-un conductor de rezistență R,** surșele fiind grupate în m grupe în paralel de cîte n surse în serie (fig. 3.21), este dată de expresia

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{n}{m} r} = \frac{pm\mathcal{E}}{m^2 R + pr}$$

Valoarea maximă a intensității curentului reiese din condiția $\frac{dI}{dm} = 0$; se obține $\frac{R}{r} = \frac{n}{m}$. Dacă $R = r$, gru-

Scanned with CamScanner

parea mixtă cea mai avantajoasă din punct de vedere energetic este obținută atunci cînd $m = n$.

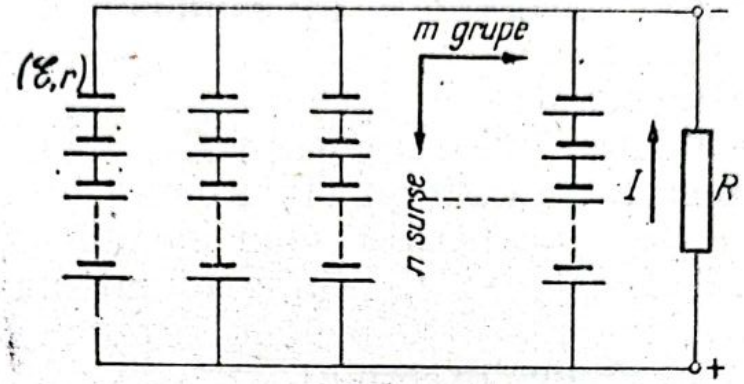


Fig. 3.21

3.3. Curentul electric în electroliți

1. **Electroliza. Legea electrolizei.** Substanțele care fiind dizolvate într-un lichid sau în stare topită se disociază, adică are loc separarea substanței compuse în ioni, se numesc *electroliți*. Fenomenul de separare a unor substanțe din electroliți cu ajutorul curentului electric se numește *electroliză*. Conform legii electrolizei, care reunește cele două legi stabilite pe cale experimentală de Faraday în 1834, masa m de substanță care se depune în timpul t la un electrod al cuvei electrolitice este proporțională cu sarcina electrică Q trecută prin cuvă și cu echivalentul chimic al elementului depus

$$m = \frac{1}{F}\,\frac{A}{v}\int_{t_0}^{t_0+t} I\,dt = \frac{1}{F}\,\frac{A}{\upsilon}\,Q$$

unde A este masa atomică a substanței, υ — valența acesteia, $F = 9{,}649 \cdot 10^7 \dfrac{\text{C}}{\text{echiv. kg}}$ — numărul lui Faraday, $\dfrac{A}{\upsilon}$ — echivalentul chimic al substanței, $\dfrac{1}{F}\,\dfrac{A}{\upsilon} = K$ — echivalentul electrochimic al substanței.

Scanned with CamScanner

Din formulă rezultă că, dacă se depune un echivalent-kilogram de substanţă, adică

$$m = \frac{A}{\upsilon}[\text{kg}]$$

Q trebuie să fie numeric egal cu F.

Electroliza are multe aplicaţii în tehnică: producerea unor metale de mare puritate chimică (Al, Cu, Zn); în galvanostegie (acoperirea unor metale oxidabile cu un strat protector de Ni, Cr, Zn); în galvanoplastie (reproducerea din metal a unor modele în relief, dintr-un alt material — ghips, de exemplu).

2. **Elemente galvanice.** La contactul metal-soluţie electrolitică se formează, conform teoriei lui Nernst (1889) privind trecerea ionilor din metal în soluţie, un strat dublu de sarcini apărînd un cîmp electric imprimat şi o tensiune de contact U_{10}. Cînd doi electrozi, unul cu tensiune de contact pozitivă şi celălalt cu tensiune de contact negativă faţă de o soluţie electrolitică, sînt cufundaţi în aceasta se formează o pilă electrică (sau element galvanic) caracterizată printr-o t.e.m. egală cu diferenţa tensiunilor de contact (de electrod)

$$S = U_{10} - U_{20}.$$

Ca exemplu de pilă electrică se poate lua pila Leclanché (fig. 3.22) în care are loc reacţia chimică totală

$$Zn + 2NH_4Cl + 2\,MnO_2 = ZnCl_2 + H_2O + 2NH_3 + Mn_2O_3$$

(amoniacul ce rezultă se combină cu clorura de zinc).

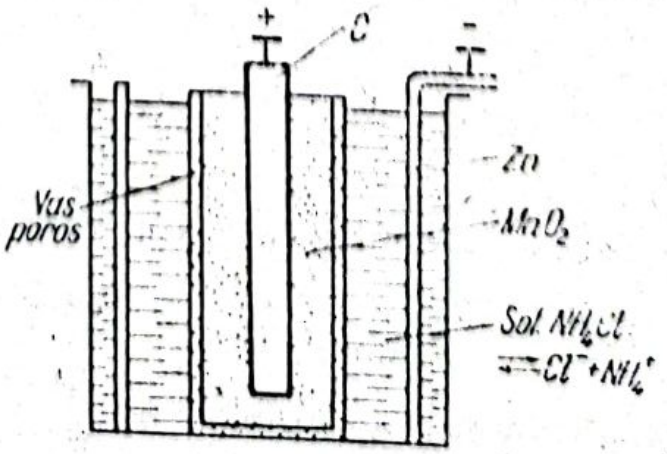


Fig. 3.22

Scanned with CamScanner

T.e.m. a pilei Leclanché este $\mathcal{E} = 1{,}5\text{V}$, iar rezistența interioară $r = 0{,}3\ \Omega$.

Foarte utilizată este pila Leclanché, „uscată": electrodul de zinc formează vasul de formă cilindrică, soluția de țipirig este îngroșată cu făină de cartofi, iar electrodul pozitiv (bastonaș de cărbune de retortă) este introdus într-un săculeț de pînză rară cu depolarizant (MnO_2).

3.4. Curentul electric în vid și prin gaze

1. **Mișcarea unei particule cu sarcină electrică** q într-un cîmp electric omogen este descrisă de ecuația

$$q\vec{E} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Alegînd sistemul de coordonate ca în fig. 3.23, explicitînd proiecțiile traiectoriei și eliminînd timpul se obține pentru cazul în care viteza inițială a particulei este perpendiculară pe cîmp

$$z_L = z_0 + \frac{qE}{2mv_0^2}(y - y_0)^2.$$

După ieșirea din deflectorul de lungime L traiectoria e înclinată față de cea incidentă

$$z' = \frac{qE}{mv_0^2}l.$$

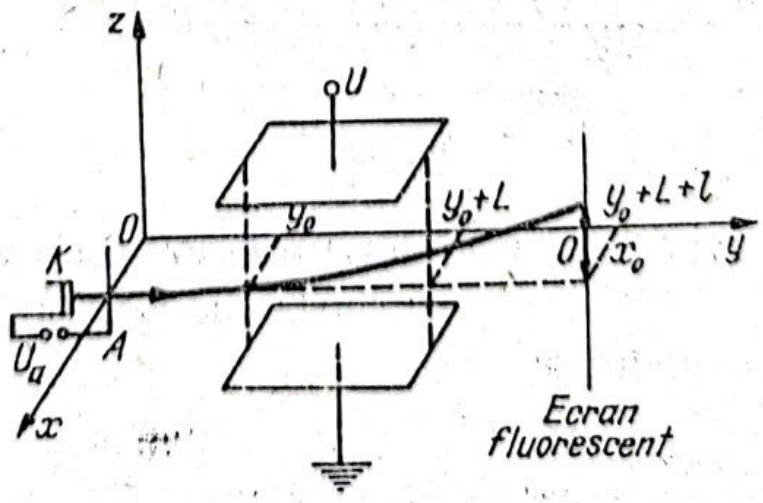


Fig. 3.23

Scanned with CamScanner

Deviaţia totală poate fi crescută prin străbaterea unei distanţe suplimentare l, şi devine

$$D = z_L - z_0 + z'l = \frac{qUL}{mv_0^2 d}\left(\frac{L}{2} + l\right).$$

Figura 3.23 reprezintă principiul deflecţiei electrostatice într-un tub catodic.

2. **Trioda. Parametrii dinamici.** Trioda lucrează în regim dinamic cînd

$$dU_a = -R\,dI_a \tag{3.22}$$

ca urmare a faptului că tensiunea grilei variază, R fiind rezistenţa de sarcină. Din ecuaţia diferenţială a triodei

$$dI_a(U_g', U_a) = S\,dU_g + \frac{1}{R_i}dU_a$$

S fiind panta (sau canductanţa mutuală) curbei caracteristice de grilă $I_a = f(U_g)$, $U_a = \text{const.}$

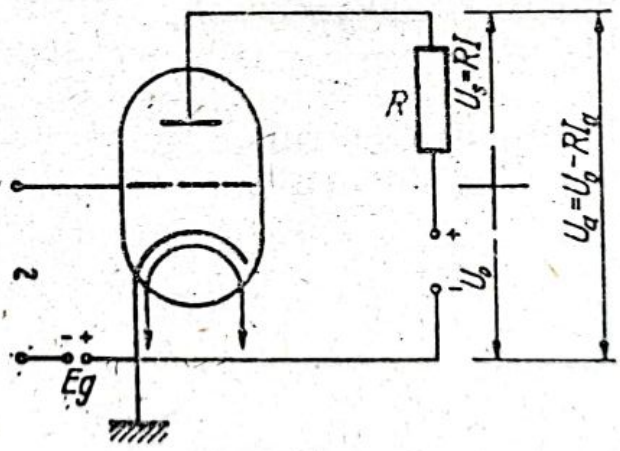


Fig. 3.24

şi R_i rezistenţa internă determinată din caracteristica anodică $I_a = f(U_a)$, $U_g = \text{const.}$ şi ecuaţia (3.22), rezultă panta dinamică

$$S_d = \frac{dI_a}{dU_g} = \frac{S}{1 + R/R_i}\left[\frac{\text{mA}}{\text{V}}\right]$$

Scanned with CamScanner

Factorul de amplificare în regim dinamic, definit prin $\mu_d = -(\mathrm{d}U_a/\mathrm{d}U_g)$ și în care se substituie egalitatea (3.22) și cunoscînd că în regim static $SR_i = \mu$, are expresia

$$\mu_d = \frac{\mu}{1 + R_i/R}.$$

Plecînd de la expresia pantei dinamice scrisă în forma $S_d = \mathrm{d}I_a/\mathrm{d}U_g = \mu/(R + R_i)$ și considerînd în locul variației foarte mici pentru U_g o variație periodică se obține ecuația

$$i_a(R_i + R) = \mu \cdot u_g$$

care stă la baza schemei echivalente a triodei montată ca amplificator de tensiune (fig. 3.24).

3. **Descărcarea electrică.** Există trei tipuri fundamentale de descărcare electrică într-un gaz: obscură, luminiscentă și în arc. Din punctul de vedere ale proceselor elementare care contribuie la menținerea descărcărilor electrice în gaze, se deosebesc descărcările autonome, neautonome și semiautonome (sau Townsend).

Plasma este o substanță aflată într-o stare de agregare asemănătoare stării gazoase, alcătuită din electroni, ioni, atomi sau molecule (neutri) și fotoni.

3.5. Semiconductor

Semiconductorii sînt corpuri a căror rezistivitate $\rho \approx \approx 10^3 \div 10^7\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ este cuprinsă între cea a metalelor ($10^{-8} \div \div 10^{-6} \Omega \cdot \mathrm{m}$), și cea a izolatorilor ($10^8 - 10^{20} \Omega \cdot \mathrm{m}$) și scade puternic cu creșterea temperaturii T, iar energia minimă necesară pentru trecerea electronilor din starea de electroni legați de atomi în stare de electroni liberi (ΔW_0) este mai mică de 3 eV.

1. **Conductibilitatea electrică a semiconductorilor.** În mecanica cuantică se dezvoltă teoria benzilor, conform căreia electronii atomilor din rețeaua cristalină au posi-

Scanned with CamScanner

bilitatea să ocupe nivele de energie cuprinse în anumite benzi permise și nu numai nivelele discrete corespunzătoare atomului izolat (cum se întîmplă la starea gazoasă).

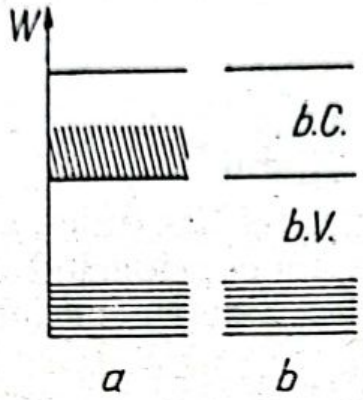


Fig. 3.25

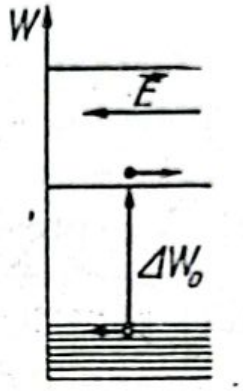


Fig. 3.26

Solidele se pot clasifica în: metale, izolatori și semiconductori. Dacă $T = 0$ și dacă ultima bandă ocupată de electroni este numai parțial completată, cristalul este un conductor și face parte din clasa metalelor; această ultimă bandă, poartă de aceea și numele de *bandă de conducție*. Dacă însă ultima bandă ocupată de electroni este complet populată (*bandă de valență*), iar banda următoare (banda de conducție) este complet liberă, conductibilitatea electrică este nulă și cristalul este un izolator. În fig. 3.25 este reprezentat schematic spectrul energetic pentru metale (a), respectiv izolatori (b).

La temperaturi $T>0$, în izolatori o parte din electronii benzii de valență sînt excitați în banda de conducție, contribuind astfel la conductibilitatea electrică atît ei, cît și „golurile" pozitive corespunzătoare lăsate în banda de valență (fig. 3.26).

Acest fenomen este desigur cu atît mai pronunțat cu cît temperatura este mai mare și cu cît lărgimea zonei interzise ΔW_0 este mai mică. Dacă lărgimea acestei zone este prea mare (la diamant $\Delta W_0 = 7$ eV) cristalul rămîne pratic izolator în condiții obișnuite de temperatură; dacă însă această lărgime este suficient de mică (de exemplu la germaniu este de 0,67 eV, iar la siliciu de 1,11 eV), la temperaturi obișnuite, numărul electronilor excitați termic în zona de conducție este destul de mare și cristalul se comportă ca un *semiconductor intrinseco* (numărul golurilor este egal cu cel al electronilor).

Scanned with CamScanner

2. **Dioda semiconductoare**, cristal semiconductor în care o regiune conține impurități donoare, iar cealaltă regiune impurități acceptoare. Zona de tranziție în care se obține trecerea de la conducția tip n la cea de tip p se numește *joncțiune* $n - p$.

3. **Tranzistorul.** Dispozitiv semiconductor constînd din două joncțiuni $p - n$ separate de un strat subțire (baza) în care are loc interacția curentului.

Într-un tranzistor $p - n - p$ conductivitatea regiunilor semiconductoare de tip p (emiter și colector) este mult mai mare decît a bazei de tip n.

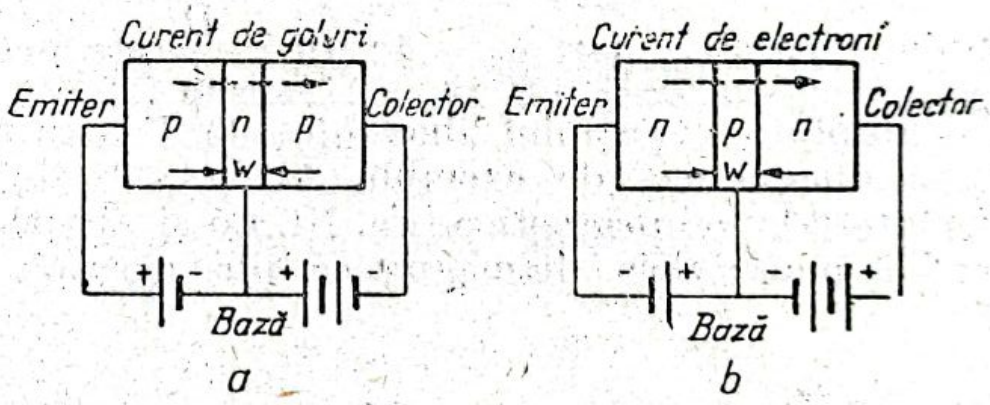


Fig. 3.27

În fig. 3.27, a este reprezentat schematic un tranzistor $p-n-p$, iar în (b) un tranzistor n-p-n.

3.6. Electromagnetismul

Cîmpul electromagnetic este descris de ecuațiile lui Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

în care $\vec{E}$ este intensitatea cîmpului electric, $\vec{B}$ inducția magnetică, μ permeabilitatea magnetică a mediului, ε

Scanned with CamScanner

permitivitatea electrică a mediului, ρ densitatea de volum a sarcinii, iar $\vec{J}$ densitatea de curent.

1. **Cîmpul magnetic.** *Relaţia dintre inducţia B şi intensitatea cîmpului magnetic H*

$$B = \mu_0 \mu_r H.$$

Inducţia se măsoară în weber pe metru pătrat (Wb/m^2) sau tesla (T), iar intensitatea cîmpului magnetic H în amper pe metru (A/m).

Permeabilitatea absolută a mediului considerat este produsul $\mu_0\mu_r$, unde μ_r reprezintă permabilitatea relativă a mediului respectiv, iar $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ este permeabilitatea absolută a spaţiului liber ($\mu_r = 1$). Pentru materialele paramagnetice (de exemplu Al) $\mu_r > 1$; $\mu_r \gg 1$, pentru materiale feromagnetice (Fe, Ni, Co şi aliajele lor) iar pentru materialele diamagnetice (de exemplu Cu) $\mu_r < 1$.

2. **Momentul magnetic al unei bare magnetice** (sau al unei spire de arie A parcursă de curentul de intensitate I), situată într-un cîmp magnetic exterior omogen, este egal cu cuplul maxim care acţionează asupra barei magnetice (spirei) pentru unitatea de cîmp, în vid

$$M_m = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{H} \text{ [Wb·m]}$$

sau

$$M_{mB} = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{B} \text{ [A·m}^2\text{]}.$$

Perioada de oscilaţie a unei bare magnetice suspendate de un fir fără torsiune, într-un cîmp magnetic extern omogen, este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}_{max}}}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M_m H}} \quad \text{sau} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M_{mB} B}}\,.$$

J este momentul de inerţie al barei magnetice faţă de axa în jurul căreia se face rotaţia.

3. **Potenţialul determinat de un magnet** situat în aer, mic faţă de distanţa r măsurată din mijlocul lui pînă în punctul P, este

$$V_P = \frac{M_m \cos\alpha}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{M_{mB}\cos\alpha}{4\pi r^2},$$

α fiind unghiul format de $\vec{r}$ şi $\vec{M}_m$. Unitatea pentru acest potenţial este amperul.

4. **Polarizarea magnetică. Magnetizarea.** Polarizarea magnetică este

$$\vec{\mathfrak{J}} = \vec{B} - \mu_0\vec{H}$$

iar magnetizarea

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}.$$

Între $\vec{\mathfrak{J}}$ şi $\vec{M}$ există relaţia

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mathfrak{J}}}{\mu_0}\,.$$

Unitatea pentru magnetizare este amper pe metru $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$.

5. **Susceptivitatea magnetică**

$$\chi_m = \frac{\mathfrak{J}}{\mu_0 H},$$

$$\chi_m = \frac{M}{H}\,.$$

Scanned with CamScanner

în funcție de permeabilitatea (magnetică) relativă

$$\chi_m = \mu_r - 1.$$

Există următoarea corelație între $\vec{B}$, $\vec{H}$ și $\vec{M}$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}.$$

6. Clasificarea substanțelor din punct de vedere magnetic

Din punct de vedere al magnetismului, substanțele sînt de trei feluri :

Feromagnetice — acele metale sau aliaje, cu permeabilitate foarte mare, funcție de cîmpul magnetic aplicat, care prezintă, sub punctul Curie ($T < T_c$), magnetizare permanentă chiar și atunci cînd $H_{ext} = 0$, precum și fenomenul de histerezis magnetic (fig. 3.28).

Paramagnetice — acele substanțe care prezintă dipoli magnetici moleculari permanenți, ce se orientează sub acțiunea lui H_{ext}; paramagnetismul apare la $T \geqslant T_c$ și este caracterizat prin $\chi_m^{(p)} = C/T > 0$ (C —constanta lui Curie).

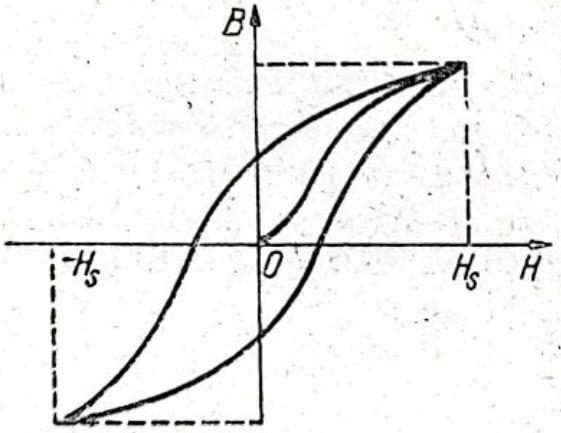


Fig. 3.28

Diamagnetice — substanțe la care dipolii se formează sub acțiunea cîmpului (sînt „induși") și care au $\chi_m^{(d)} < 0$, independentă de temperatură.

7. Cîmpul magnetic al curenților. a) *Intensitatea cîmpului magnetic creat de un curent care trece printr-un conductor rectiliniu foarte lung*

$$H = \frac{I}{2\pi d}$$

unde I este intensitatea curentului, iar d distanța la care se calculează cîmpul.

Scanned with CamScanner

b) *Intensitatea cîmpului magnetic pe axa unei spire circulare parcursă de un curent*:

— în centrul spirei

$$H = \frac{I}{2R},$$

iar pentru un *cadru circular cu N spire*

$$H = \frac{NI}{2R}$$ (R — raza spirei).

c) *Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul unei bobine rectilinii lungi cu N spire* în puncte situate în apropierea centrului bobinei.

$$H = \frac{NI}{l}$$

l fiind lungimea bobinei.

8. **Legea circuitului magnetic (legea lui Ámpère).** Integrala de linie (circulaţia) a vectorului intensitate a cîmpului magnetic pe un contur închis este egală cu suma algebrică a curenţilor care străbat suprafaţa limitată de conturul de integrare

$$\oint H \, dl \cos\alpha = \sum_i I_i$$

α fiind unghiul format de $\vec{H}$ şi $\vec{dl}$ (elementul de contur).

La calculul sumei, curenţii se consideră pozitivi cînd sensul în care se înlănţuie conturul de integrare corespunde, după regula burghiului, cu sensul în care se face integrarea.

Dacă conturul de integrare înlănţuie o bobină cu N spire,

$$\oint H \, dl \cos\alpha = NI.$$

Membrul stîng al egalităţii se numeşte *tensiune magnetomotoare* (t.m.m.), iar membrul drept poartă denumirea de *solenaţie* şi se măsoară în amper-spire.

Scanned with CamScanner

9. **Forța electromagnetică** la care este supus elementul de curent $I\,\mathrm{d}\vec{l}$, situat într-un cîmp magnetic de inducție $\vec{B}$ este

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \text{ (forța Laplace).}$$

10. **Forța electromagnetică** între doi conductori rectilinii paraleli, filiformi și foarte lungi parcurși de curenții de intensitate I_1 și respectiv I_2, pe unitatea de lungime de conductor, este

$$F_l = \frac{F}{l} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \text{ (forța Àmpère)}$$

(d — distanța dintre conductori) și este de atracție cînd curenții au același sens și de respingere în cazul contrar.

11. **Fluxul inducției magnetice**

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha.$$

Fluxul inducției magnetice are ca unitate weberul (Wb).

12. **Forța portantă a unui electromagnet**

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}$$

în care B este inducția magnetică în zona polul electromagnetului — armătură și S suprafața de contact între pol și armătură.

13. **Inductanța proprie. Inductanța mutuală.** În cazul unui circuit parcurs de un curent (fig. 3.29, *a*) de intensitate I, fluxul Φ_L produs de acest curent, se numește flux de inducție proprie și poate fi reprezentat sub forma

$$\Phi_L = LI. \qquad (3.23)$$

Mărimea L se numește *inductanță proprie* a circuitului. Unitatea pentru inductanță se numeste henry (H).

Scanned with CamScanner

a) Pentru un tor (dimensiunile secţiunii prin tor fiind mici în comparaţie cu diametrul torului)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

unde l este lungimea medie a circuitului magnetic, iar N numărul total de spire bobinate pe tor.

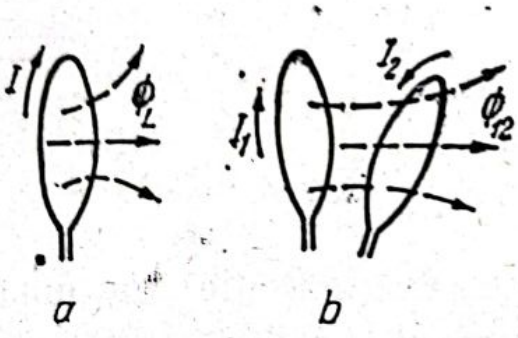


Fig. 3.29

b) Inductanţa unei bobine circulare foarte lungi, cu secţiunea S (neglijînd cîmpul magnetic din exteriorul ei), este tot

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}.$$

Cînd două circuite străbătute de curent sînt aşezate aproape unul de altul, (fig. 3.29, *b*) o parte din fluxul magnetic al primului circuit străbate pe cel de al doilea (Φ_{12}) şi invers, o parte din fluxul magnetic al celui de al doilea străbate primul circuit (Φ_{21}). Raportul

$$\frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = M[\mathrm{H}]$$

se numeşte *inductanţa mutuală* a circuitelor $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ unde k (0, . . ., 1) se numeşte *coeficient de cuplaj*.

14. Legea inducţiei electromagnetice, (Faraday). Dacă un circuit închis este străbătut de fluxul variabil Φ, în circuitul respectiv apare o forţă electromotoare indusă

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}[\mathrm{V}]. \qquad (3.24)$$

Sensul curentului de inducţie care apare este dat de *regula lui Lenz* : tensiunea electromotoare indusă se opune cauzei care dă naştere variaţiei fluxului magnetic prin fluxul magnetic produs de curentul de inducţie.

Scanned with CamScanner

Această lege este perfect generală fiind valabilă oricare ar fi mijlocul prin care se produce variaţia fluxului magnetic : se poate mişca sursa de flux magnetic (un alt circuit electric sau un magnet) faţă de circuitul considerat, se poate varia forma circuitului considerat etc.

15. Tensiunea electromotoare de autoinducţie. În cazul unui circuit parcurs de un curent variabil i, din relaţiile (3.23), (3.24) se obţine expresia t.e.m. de autoinducţie

$$\mathcal{E}_{ai} = - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

16. Tensiunea electromotoare de inducţie mutuală. În cazul circuitelor din figura 3.29, b parcurse, respectiv, de curenţii variabili i_1 şi i_2 se obţin următoarele expresii pentru t.e.m. de inducţie mutuală

$$E_{im1} = - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \text{ şi } E_{im2} = - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

17. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar în mişcare uniformă cu viteza v într-un cîmp magnetic uniform este

$$\mathcal{E}_i = B \cdot l \cdot v. \ (\vec{v} \perp \vec{B}).$$

Fenomenul inducţiei electromagnetice stă la baza funcţionării generatoarelor de energie electrică, în care are loc trnsformarea energiei mecanice în energie electrică.

18. Energia localizată în cîmpul magnetic al unei bobine parcursă de curentul de intensitate I este

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \ [J].$$

19. Densitatea de volum a energiei magnetice pentru medii magnetice liniare

$$w_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right].$$

Scanned with CamScanner

20. Mişcarea particulelor în cîmp magnetic. *Forţa Lorentz* care acţionează asupra unei particule cu sarcină electrică avînd viteza $\vec{v}$ într-un cîmp de inducţie $\vec{B}$ uniform (fig. 3.30), este

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

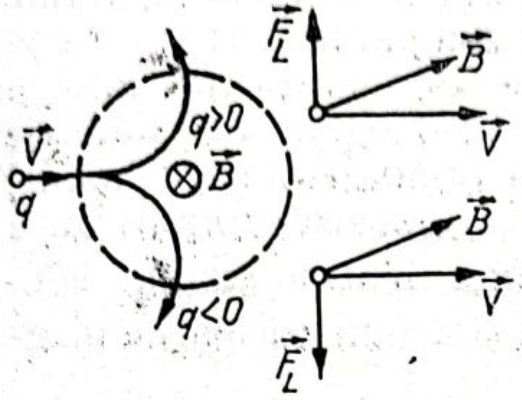


Fig. 3.30

a) *Cazul* $(\widehat{\vec{v}, \vec{B}}) \neq 0$ (fig. 3.31) Raza R a proiecţiei traiectoriei pe un plan normal la $\vec{B}$ (raza de giraţie) se calculează din egalitatea $F_L = mv_\perp^2/R$ (forţa Lorentz=forţa centripetă), adică

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = eBv_\perp,$$

de unde

$$R = \frac{mv}{eB}\sin\alpha.$$

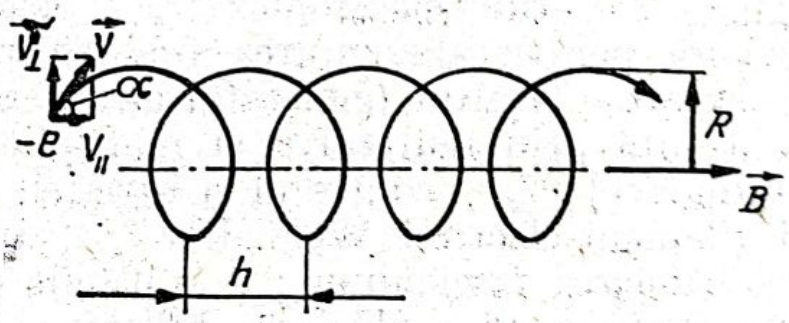


Fig. 3.31

b) Ţinînd seama de expresia perioadei unei rotaţii complete

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{eB},$$

rezultă pentru pasul traiectoriei helicoidale, a electronului în cazul acesta, următoarea expresie

$$h = v_\parallel T = \frac{2\pi mv}{eB}\cos\alpha.$$

Mărimea $\upsilon_c = eB/2\pi m$ se numeşte *frecvenţă ciclotronică*.

Scanned with CamScanner

Pentru unghiuri α mici, pasul elicoidei nu depinde practic de valoarea lui α. Din această cauză un fascicul de electroni, ale căror traiectorii sînt situate în limitele unui con cu unghi mic de deschidere α este strîns de cîmpul magnetic într-un focar punctual. Acţiune de focalizare are şi cîmpul magnetic neomogen, cu simetrie axială, dintre polii blindajelor unor bobine scurte (fig. 3.32). Asemenea cîmpuri au o acţiune analogă unor lentile simple convergente în optică şi se numesc lentile magnetice scurte.

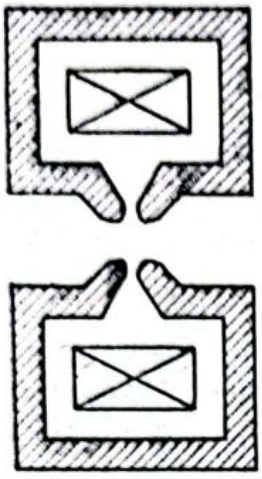


Fig.3.32

Lentilele magnetice sînt folosite în microscopia electronică.

21. Microscopul electronic de explorare (fig. 3.33) se compune din :

1 — fascicul electronic de explorare; *2* — obiectul de cercetat; *3—4* — lentile magnetice de focalizare; *5* — diafragme; *6* — tun electronic; 7_a — generator de înaltă frecvenţă pentru alimentarea filamentului; 7_b — generator Cockroft — Walton (generator de tensiune înaltă continuă, obţinută prin redresarea şi multiplicarea unei tensiuni alternative); 7_c — controlul şi reglarea automată a tensiunii filament-electrod Wehnelt; 7_d — anod; *8* — plăci pentru baleierea fasciculului; *9* — plăcile de baleiaj ale tubului cinescop; *10* — plăci de deflexie; *11* — electrod colector al electronilor împrăştiaţi de obiect; *12* — amplificator pentru semnalul aplicat electrodului de comandă a tubului cinescop (videoamplificator).

Fasciculul electronic care explorează prin baleiere suprafaţa obiectului se împrăştie sub diferite unghiuri în funcţie de caracteristicile suprafeţei, parte din electronii împrăştiaţi fiind colectaţi de colector. Intensitatea spotului tubului cinescop este determinată de sarcina colectată, corespunzătoare fiecărui punct al suprafeţei obiectului, deci luminozitatea punctului de pe ecran care corespunde unui anumit punct al suprafeţei obiectului va depinde de calităţile acesteia. Deflexiile maxime pe obiect

Scanned with CamScanner

sînt de ordinul 0,1 mm, iar pe ecranul cinescopului — de ordinul 10^2 mm; mărirea liniară obținută este pînă la 140 000. Puterea de rezoluție este, în general, determi-

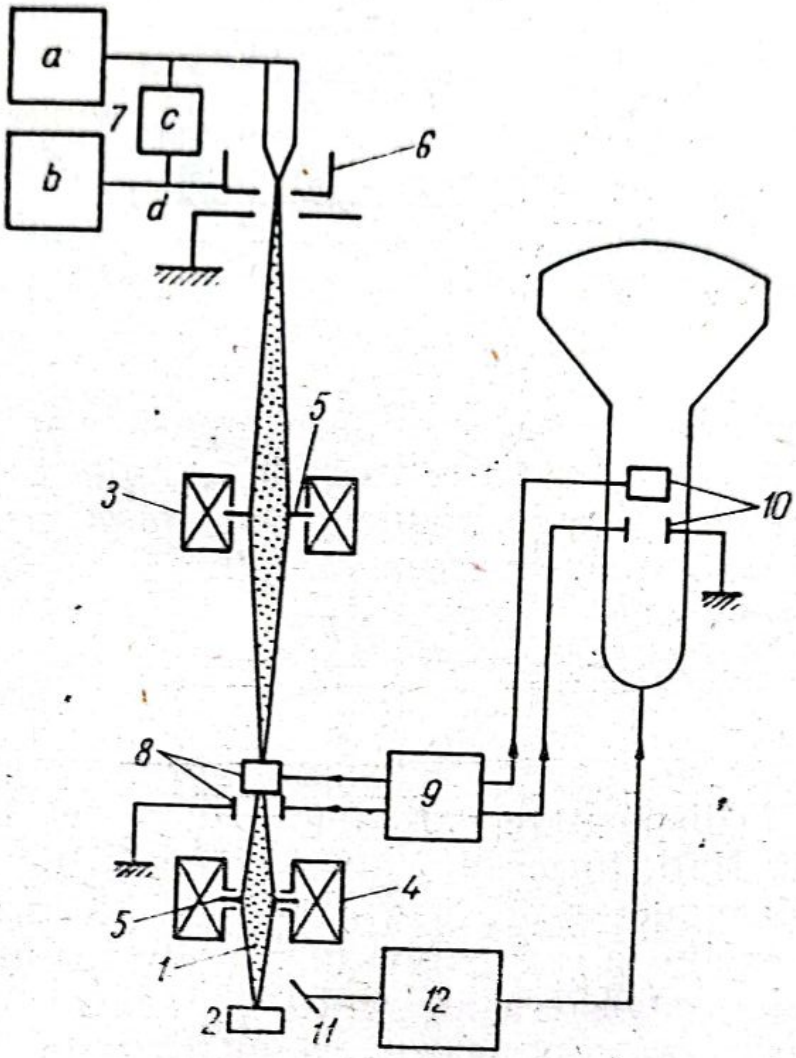


Fig. 3.33

nată de diametrul spotului și poate ajunge pînă la 200 Å. Microscoapele cu explorare pot fi de reflexie, ca cel descris mai sus, sau de transmisie, pentru obiectele (probele) transparente.

22. **Efectul Hall** constă în apariția unui cîmp electric suplimentar într-un conductor sau semiconductor prin care circulă un curent electric, plasat într-un cîmp magnetic normal pe direcția curentului; liniile de forță ale acestui cîmp electric sînt perpendiculare pe planul format de direcțiile cîmpului magnetic și curentului electric. Dacă conducția probei este asigurată de electroni,

Scanned with CamScanner

atunci, fiind supuși acțiunii forței Lorentz, aceștia vor fi deviați în sensul indicat în fig. 3.34. Sarcinile pozitive rămase necompensate pe suprafața opusă vor exercita o acțiune de atracție. În starea de echilibru $F_e = F_L$ și în ipoteza că toate particulele s-ar mișca cu aceeași viteză $v = I/neS$, se obține *tensiunea Hall*:

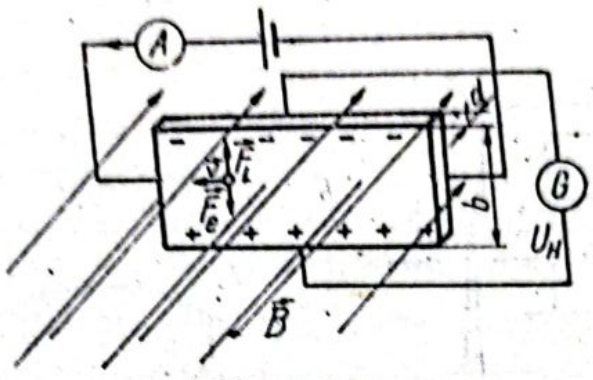


Fig. 3.34

$$U_H = R_H \frac{BI}{d} \ ;$$

$R_H = (ne)^{-1}$ se numește constantă *Hall*.

Un tip de dispozitive care folosesc efectul Hall sînt generatoarele Hall, formate dintr-o plăcuță dreptunghiulară de semiconductor prevăzută cu doi electrozi pentru curentul de excitație care străbate plăcuța în lung și alți doi electrozi pentru tensiunea Hall. Generatorul Hall poate fi folosit ca amplificator, ca întrerupător de mare putere, ca analizator al unor semnale periodice complexe, ca mijloc de măsurare a cîmpului magnetic în spații mici etc.

23. Circuite de curent alternativ. a) *Circuitul serie RLC.* Dacă unui circuit serie *RLC* (fig. 3.35, a) i se aplică o tensiune sinusoidală $u = U_m \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$, curentul din circuit are intensitatea $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$, în care

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} =$$

$$= \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

relație care reprezintă *legea lui Ohm pentru circuitul de curent alternativ* și

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$

cu notațiile : $X_L = L\omega$ — *reactanța inductivă a circuitului* (rezistența suplimentară introdusă de bobină),

$X_C = \frac{1}{C\omega}$ — *reactanța capacitivă* a circuitului (rezistența introdusă de condensator),

$X = X_L - X_C$ — *reactanța totală* a circuitului,

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ — *impedanța circuitului* (rezistența totală a circuitului),

φ — *unghiul de defazaj* între tensiune și curent.

Diagrama fazorială a circuitului serie este reprezentată în fig. 3.35, b.

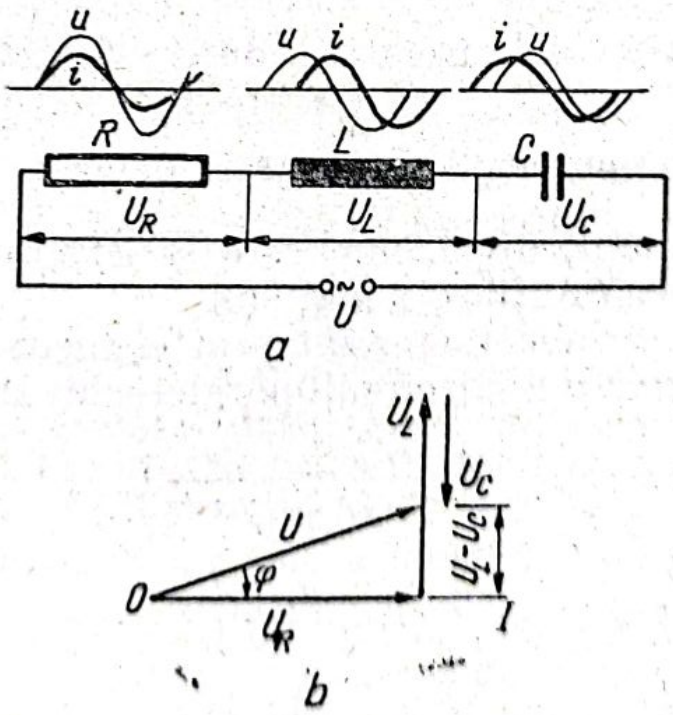


Fig. 3.35

b) *Circuitul paralel RLC* (fig. 3.36, a). Pentru construcția diagramei fazoriale se alege ca origine de fază

Scanned with CamScanner

tensiunea aplicată circuitului deoarece este comună elementelor R, L și C (fig. 3.36, b).

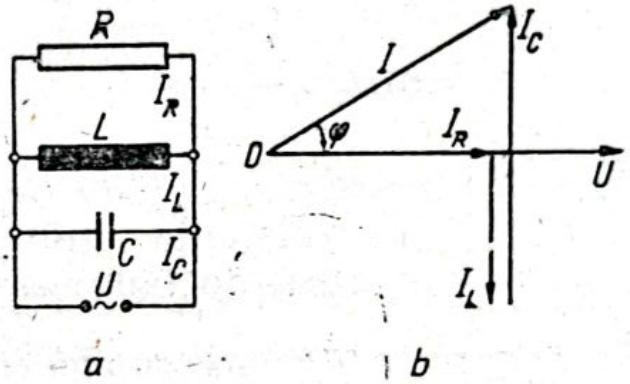


Fig. 3.36

Curentul total I are valoarea

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}.$$

Unghiul de defazaj

$$\varphi = \operatorname{arctg} R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$$

rezultă pozitiv sau negativ, după cum $C\omega < \frac{1}{L\omega}$ sau $C\omega > \frac{1}{L\omega}$, deci curentul total I este defazat în urma sau înaintea tensiunii, după cum este satisfăcută prima sau ultima din inegalitățile de mai sus.

Un circuit serie caracterizat prin elementele R și X se poate transforma într-un circuit paralel echivalent (fig. 3.37)

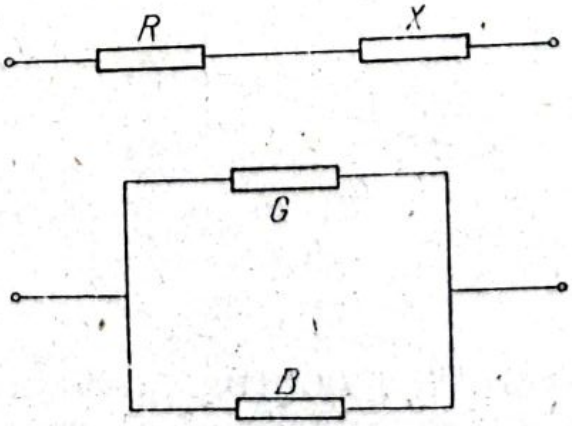


Fig. 3.37

Scanned with CamScanner

caracterizat prin elementele

$$G = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{Z^2}, \quad Y = \frac{1}{Z}$$

ce reprezintă respectiv *conductanța*, *susceptanța* și *admitanța* circuitului.

Tabelul 3.1 prezintă valorile elementelor caracteristice cîtorva tipuri clasice de circuite.

24. Puterea în curent alternativ. Energia cheltuită de sursă se utilizează pentru a se transforma în căldură și pentru modificarea energiei cîmpurilor magnetice și electrice.

a) *Puterea activă* P disipată, în rezistența circuitului este

$$P = RI^2 = GU^2 = UI\cos\varphi, \quad [P] = \text{watt}$$

și reprezintă energia medie generată de sursă într-o perioadă. Termenul $\cos\varphi$ a primit denumirea de *factor de putere*.

b) *Puterea reactivă* Q reprezintă o măsură a necompensării schimburilor interioare de energie între cîmpul magnetic și cîmpul electric.

$$Q = XI^2 = BU^2 = UI\sin\varphi, \quad [Q] = \text{VAR}$$

$$X = 2\omega\left(\frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}CU^2\right) = 2\omega(W_m - W_e).$$

În cazul $X = 0$ $(W_m = W_e)$, $Q = 0$. Pentru circuitele receptoare, dacă $Q > 0$ puterea reactivă este absorbită de la sursa exterioară, dacă $Q < 0$ puterea reactivă este cedată rețelei exterioare (sursei). Pentru circuitele generatoare semnele sînt schimbate.

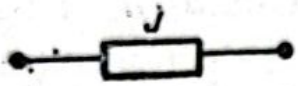
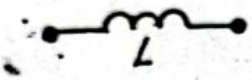
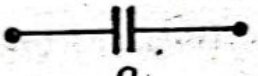
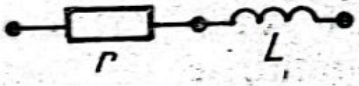
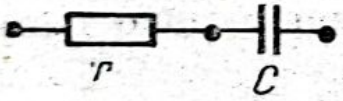
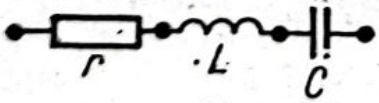
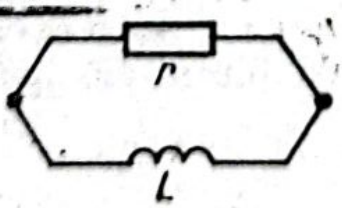
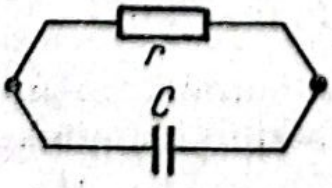
d) *Puterea aparentă* (sau *totală*) S

$$S = ZI^2 = YU^2 = UI, \quad [S] = \text{VA}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Puterea aparentă S, calculată „ca în curent continuu" fără a lua în considerație influența defazajului, reprezintă valoarea maximă a puterii active ($\cos\varphi = 1$).

Scanned with CamScanner

Circuitul	Z	φ	R
Rezistorul ideal 	r	0	r
Bobina ideală 	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$	0
Condensatorul ideal 	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	0
Circuitul r, L serie 	$\sqrt{r^2+\omega^2L^2}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega}{r}$	r
Circuitul r, C, serie 	$\sqrt{r^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{C\omega r}$	r
Circuitul r, L, C serie 	$\sqrt{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{G\omega}\right)^2}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{r}$	r
Circuitul r, L, paralel 	$\frac{rL\omega}{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{L\omega}$	$\frac{rL^2\omega^2}{r^2+L^2\omega^2}$
Circuit r, C paralel 	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2C^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{rC\omega}$	$\frac{r}{1+r^2C^2\omega^2}$

Scanned with CamScanner

Y	X	G	B
$\frac{1}{r}$	0	$\frac{1}{r}$	0
$\frac{1}{L\omega}$	$L\omega$	0	$\frac{1}{L\omega}$
$C\omega$	$-\frac{1}{C\omega}$	0	$-C\omega$
$\frac{1}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}$	$L\omega$	$\frac{r}{r^2+\omega^2L^2}$	$\frac{L\omega}{r^2+\omega^2L^2}$
$\frac{C\omega}{\sqrt{1+r^2C^2\omega^2}}$	$-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$	$-\frac{C\omega}{1+r^2C^2\omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$	$L\omega-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2+X^2}$	$\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$
$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{L^2\omega^2}$	$\frac{r^2L\omega}{r^2+L^2\omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{L\omega}$
$\frac{1}{r^2}+C^2\omega^2$	$\frac{C\omega r^2}{1+r^2C^2\omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$-C\omega$

Scanned with CamScanner

25. Rezonanța în circuitele de curent alternativ. Se spune că într-un circuit dat există *rezonanță* când reactanța echivalentă X (sau susceptanța echivalentă B) devine nulă. În cazul rezonanței, energiile reactive inductive și capacitive se compensează; factorul de putere devine egal cu unitatea: curentul se află în fază cu tensiunea aplicată. În cazul circuitelor *RLC* serie și paralel din figurile 3.35 și 3.36. condiția de rezonanță este $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ (formula lui Thomson).

26. Scrierea în complex *a principalelor expresii caracteristice circuitelor de curent alternativ.*

a) *Impedanța complexă*

$$\mathfrak{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$$

$$Z = |\mathfrak{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arg\{\mathfrak{Z}\} = \operatorname{arctg}\frac{X}{R}$$

$$R = \operatorname{Re}\{\mathfrak{Z}\} = Z\cos\varphi, \; X = \operatorname{Im}\{\mathfrak{Z}\} = Z\sin\varphi.$$

b) *Admitanța complexă*

$$\mathfrak{Y} = G - jB = Ye^{j\varphi}$$

$$Y = |\mathfrak{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi = -\arg|\mathfrak{Y}| = -\operatorname{arctg}\frac{B}{G}$$

$$G = \operatorname{Re}\{\mathfrak{Y}\} = Y\cos\varphi, \quad B = \operatorname{Im}\{\mathfrak{Y}\} = Y\sin\varphi.$$

În figura 3.38 sînt reprezentate impedanța și admitanța complexă.

c) *Legea lui Ohm*

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{U}\mathfrak{Y}.$$

d) *Legile lui Kirchhoff*

$$\sum \mathfrak{I}_k = 0, \; \sum \mathfrak{I}_k\mathfrak{Z}_k = \sum \mathfrak{E}_k.$$

e) *Circuite cuplate prin impedanța mutuală* $\mathfrak{Z}_m = jM\omega$

$$\mathfrak{I}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{I}_2\mathfrak{Z}_m = \mathfrak{E}_1, \; \mathfrak{I}_2\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{I}_1\mathfrak{Z}_m = \mathfrak{E}_2.$$

Scanned with CamScanner

f) *Puterea complexă*

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}\mathcal{I}^* = Se^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

$$S = |\mathcal{S}| = UI, \quad \varphi = \arg\{\mathcal{S}\}$$

$$P = UI\cos\varphi = \mathrm{Re}\{\mathcal{S}\}, \quad Q = UI\sin\varphi = \mathrm{Im}\{\mathcal{S}\}.$$

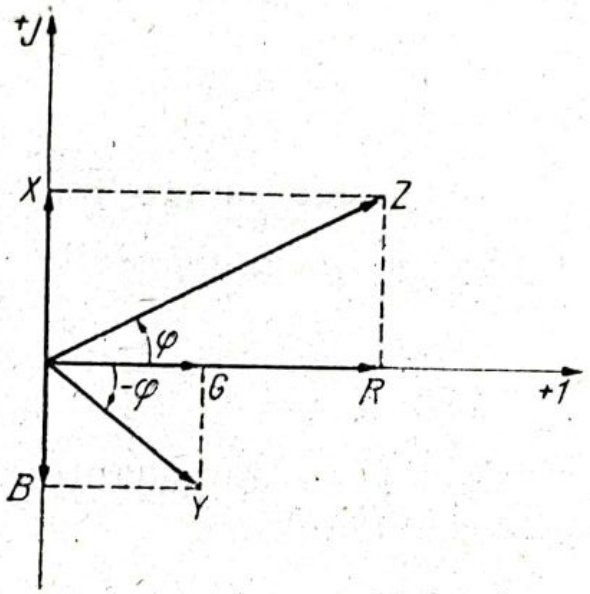


Fig. 3.38

3.7 Rețelele electrice trifazate

Sistemul trifazat simetric este un ansamblu de trei mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, valori eficace egale și diferențe relative de fază egale cu $\frac{2\pi}{3}$.

Valorile instantanee al t.e.m. (sau ale tensiunilor la borne, intensităților curenților etc.) sînt date de sistemul

$$e_A = E\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$e_B = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_C = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Scanned with CamScanner

Reprezentarea fazorială a mărimilor sistemului trifazat conduce la trei fazori, de lungimi egale și formînd între ei unghiurile de $\frac{2\pi}{3}$; fazorul $\mathcal{E}_B$ este plasat cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens invers trigonometric față de fazorul $\mathcal{E}_A$, iar fazorul $\mathcal{E}_C$ este plasat cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric față de fazorul $\mathcal{E}_A$ (fig. 3.39).

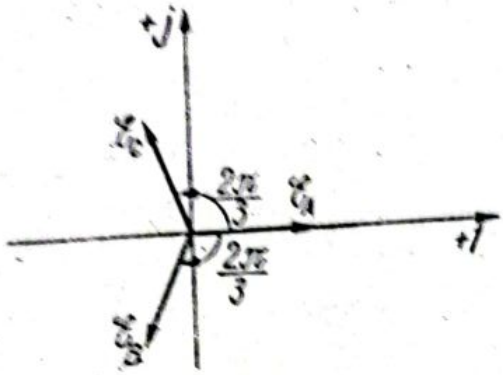


Fig. 3.39

Reprezentarea în complex a mărimilor sistemului trifazat

$$\mathcal{E}_A = Ee^{j0} = E, \quad \mathcal{E}_B = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad \mathcal{E}_C = Ee^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

Un receptor trifazat cu impedanțe complexe egale se numește *receptor echilibrat*.

1. Conexiunea în stea a unui receptor trifazat (fig. 3.40). În regim echilibrat și simetric

$$U_l = \sqrt{3}U_f, \; I_l = I_f$$

$$U_0 = 0, \quad \mathfrak{I}_0 = 0$$

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi$$

$$\mathcal{S} = \sum \mathcal{U}_f \mathfrak{I}^*_f = P + jQ.$$

În regim dezechilibrat și simetric

$$U_l = \sqrt{3}U_f, \; I_l = I_f,$$

$$\mathcal{U}_0 = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{E}_2\mathcal{Y}_2 + \mathcal{E}_3\mathcal{Y}_3}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3 + \mathcal{Y}_0},$$

$$\mathcal{U}_A = \mathcal{E}_A - \mathcal{U}_0$$

$$\mathfrak{I}_A = \mathcal{U}_A\mathcal{Y}_A = \frac{\mathcal{Y}_A}{\mathcal{Z}_A},$$

$$\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_A + \mathfrak{I}_B + \mathfrak{I}_C$$

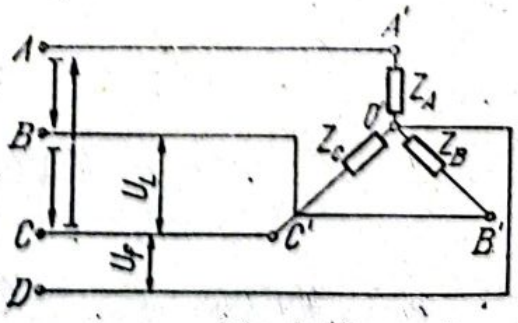


Fig. 3.40

Scanned with CamScanner

$$P = \sum_{i=1}^{3} (U_f I_f \cos\varphi)_i,$$

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{3} (\mathcal{U}_f \mathcal{I}_f^*)_i = P + jQ$$

2. **Conexiunea în triunghi** a unui receptor (fig. 3.41). În regim echilibrat și simetric

$$U_l = U_f,\ I_l = \sqrt{3} I_f$$

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos\varphi.$$

În regim dezechilibrat și simetric

$$U_l = U_f,\ I_l \neq \sqrt{3} I_f$$

$$\mathcal{I}_{A'B'} = \frac{\mathcal{U}_{A'B'}}{\mathcal{Z}_{A'B'}},\quad \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_{A'B'} - \mathcal{I}_{C'A'}$$

$$P = \sum_{i=1}^{3} (U_f I_f \cos\varphi)_i,\quad \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{3} (\mathcal{U}_f \mathcal{I}_f^*)_i = P + jQ.$$

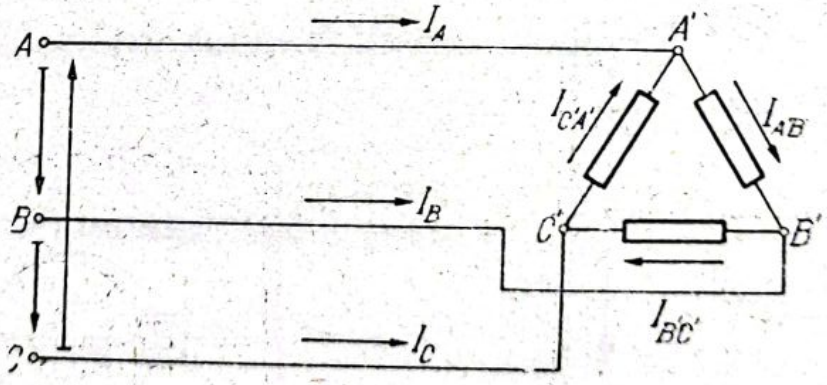


Fig. 3.41

3.8. Mașini electrice

1. **Mașina de curent continuu.** *Înfășurarea rotorului.* Cel mai simplu element constructiv al unei înfășurări este *secțiunea*, formată din ansamblul spirelor cuprinse

Scanned with CamScanner

între două lamele ale colectorului. Laturile active ale secțiunilor se numesc *mănunchiuri*.

Mănunchiurile sînt așezate pe rotor în *crestături*, într-un singur strat sau în două straturi.

Se numește *cale de curent* porțiunea de înfășurare care se parcurge între două perii consecutive de semn contrar ale colectorului.

Circuitul magnetic este format din ansamblul elementelor prin care se închid liniile de cîmp; cuprinde fierul statorului, fierul rotorului și întrefierul. T.e.m. indusă în rotor

$$E = kn\Phi = \frac{p}{a} Nn\Phi$$

cu k — constantă care depinde de valorile constructive, p — numărul de perechi de poli, a — numărul de perechi de căi de curent, N — numărul de conductori activi pe rotor, n — turația motorului, Φ — fluxul magnetic inductor al unui pol.

Legătura între t.e.m. E și tensiunea la borne U:

a) Mașina cu excitație derivație (șunt):

generator (fig. 3.42)

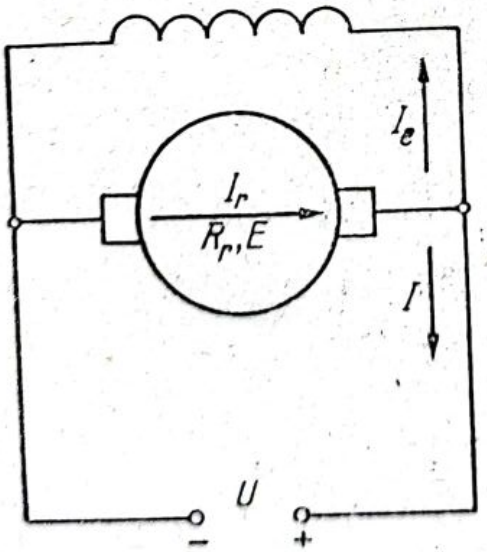


Fig. 3.42

$$I_r = I + I_e$$

$$U = E - I_r R_r = I_e R_e$$

motor (fig. 3.43)

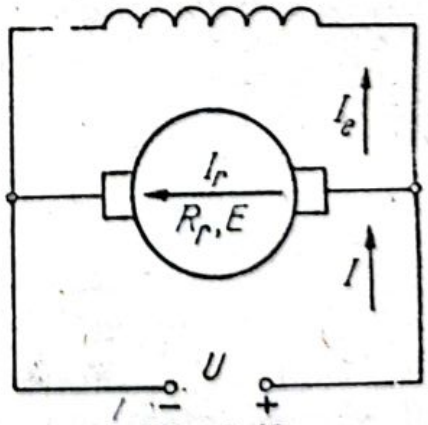


Fig. 3.43

$$I_r = I - I_e$$

$$U = E + I_r R_r = I_e R_e$$

Scanned with CamScanner

b) Mașina cu excitație serie :

generator (fig. 3.44)

$$U = E - I(R_r + R_e)$$

motor (fig. 3.45)

$$U = E + I(R_r + R_e).$$

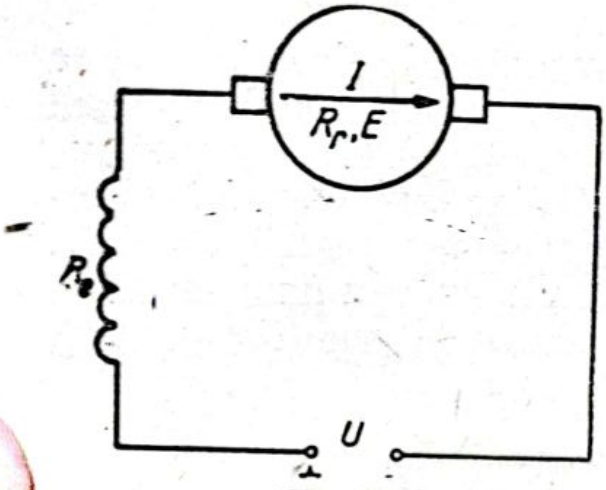


Fig. 3.44

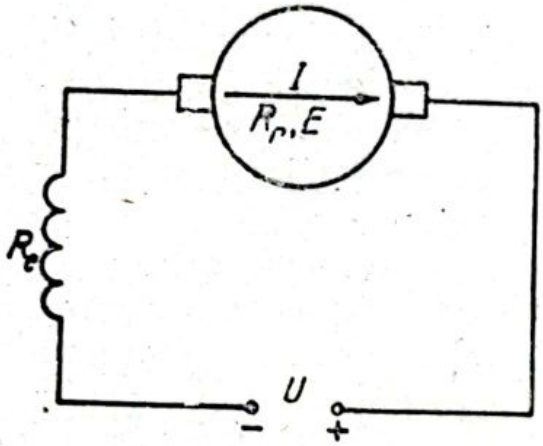


Fig. 3.45

Cuplul electromagnetic este dat prin expresia

$$M = \frac{EI_r}{\omega} = k\Phi I_r$$

cu

$$k = \frac{p}{a}\frac{N}{2\pi}.$$

Randamentul mașinii de c.c. Cu notațiile P_m — puterea mecanică și ΔP — pierderile totale (mecanice și în fier P_0 — precum și în cupru) se definesc următoarele tipuri de randament :

a) randamentul total

$$\textit{generator}: \eta_t = \frac{UI}{P_m} = \frac{UI}{UI + \Delta P},$$

$$\textit{motor}: \eta_t = \frac{P_m}{UI} = \frac{UI - \Delta P}{UI}.$$

b) randamentul mecanic

$$\textit{generator}: \eta_m = \frac{EI_r}{P_m} = \frac{P_m - P_0}{P_m},$$

$$\textit{motor}: \eta_m = \frac{P_m}{EI_r} = \frac{EI_r - P_0}{EI_r}$$

Scanned with CamScanner

c) randamentul electric

$$\textit{generator};\ \eta_e = \frac{UI}{EI_r}, \qquad \textit{motor}:\ \eta_e = \frac{EI_r}{UI}.$$

2. **Transformatorul.** Transformatorul electric este o mașină electrică statică care transformă, pe baza legii inducției electromagnetice, o putere electrică alternativă cu parametrii U_1 și I_1, într-o altă putere electrică alternativă, de aceeași frecvență, dar cu parametrii U_2 și I_2.

Legea a doua a lui Kirchhoff aplicat celor două circuite, primar, respectiv secundar, conduce la *ecuațiile generale* de funcționare *ale transformatorului*

$$u_1 - L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R_1 i_1$$

$$-L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = R_2 i_2 + u_2.$$

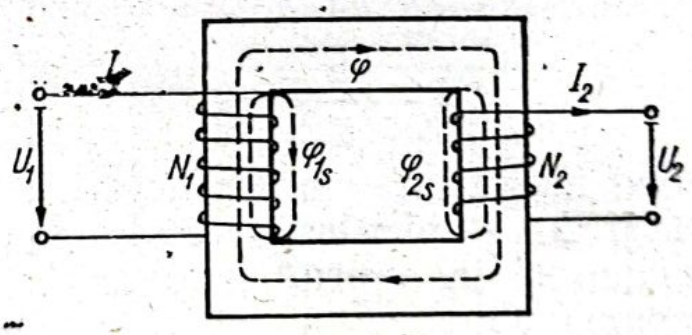


Fig. 3.46

Fiecare înfășurare este străbătută (fig. 3.46) — în afară de fluxul principal Φ (independent de sarcină) — și de un *flux de scăpări* Φ_s (dependent de sarcină). Fluxului de scăpări îi corespunde o inductanță de scăpări L_s, iar fluxului principal (util) o inductanță utilă L_u. Deci

$$L_1 = L_{s1} + L_{u1} = L_{s1} + M\frac{N_1}{N_2},$$

$$L_2 = L_{s2} + L_{u2} = L_{s2} + M\frac{N_2}{N_1}.$$

Scanned with CamScanner

Ecuațiile practice ale transformatorului

$$u_1 - N_1 \frac{d\varphi}{dt} - L_{s1} \frac{di_1}{dt} = Ri_1,$$

$$- N_2 \frac{d\varphi}{dt} - L_{s2} \frac{di_2}{dt} = R_2 i_2 + u_2 ;$$

$e_1 = - N_1 \frac{d\varphi}{dt}$ și $e_2 = - N_2 \frac{d\varphi}{dt}$ sînt t.e.m. principale induse de fluxul principal $\varphi = \Phi_m \sin \omega t$. Rezultă, de asemenea

$$e_1 = - \omega N_1 \Phi_m \cos \omega t = E_{1m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$E_1 = 4{,}44 f N_1 \Phi_m, \quad E_2 = 4{,}44 \, f \, N_2 \Phi_m.$$

Raport de transformare

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \approx \frac{U_1}{U_{20}}$$

cu U_{20} tensiunea în secundar la gol.

Randamentul transformatorului

$$\eta = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_1} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{Fe} + P_{Cu}}$$

în care P_{Fe} sînt pierderile în fier (calculabile prin încercarea la gol), iar P_{Cu} pierderile în cuprul celor două înfășurări (calculabile prin încercarea la scurtcircuit).

Observație. Este curent întrebuințată și notația L_{11} și L_{22} în loc de L_1 și L_2.

3. Mașina asincronă. Mașina de curent alternativ, al cărei rotor are turația diferită de cea a cîmpului învîrtitor creat de stator și este dependentă de sarcină, este numită mașină asincronă.

Turația cîmpului învîrtitor al statorului (*turația de sincronism*) depinde numai de frecvența curenților din

Scanned with CamScanner

bobinaj și de numărul de perechi de poli ai acestuia

$$n_1 = \frac{f}{p}\,(\text{rot/s}), \quad n_1 = \frac{60f}{p}\,(\text{rot/min}).$$

Cîmpul învîrtitor taie atît conductoarele bobinajului statoric, cît și conductoarele bobinajului rotoric și va induce t.e.m. în ambele bobinaje, ca în orice transformator. Dacă rotorul este imobil

$$E_{20} = 4{,}44 f k_2 N_2 \Phi, \quad E_1 = 4{,}44 f k_1 N_1 \Phi$$

cu: k — factor subunitar, factor de înfășurare, ce ține seama de modul de bobinaj; N — numărul de spire pe fază; kN — numărul efectiv de spire, Φ — fluxul inductor.

În momentul egalării cuplului electromagnetic cu cel rezistent la arbore, rotorul are o turație $n_2 < n_1$. Rotorul prezintă o *alunecare* definită prin relația

$$s = \frac{n_1 - n_2}{n_1}.$$

Pentru $n_2 < n_1$, deci $s > 0$, mașina funcționează ca *motor* (cu $s = 1$ la pornire și $s = 0$ la sincronism), dacă sensul de rotație a rotorului coincide cu cel al cîmpului statoric; dacă rotorul are sens contrar cîmpului statoric, mașina funcționează în regim de *frînă electromagnetică*

$$s = \frac{n_1 + n_2}{n_1} > 1.$$

Pentru $n_2 > n_1$, deci $s < 0$, mașina funcționează ca *generator*.

T.e.m. și curentul din rotor, în mers, au frecvența

$$f_2 = sf_1 < f_1.$$

Rezultă

$$E_2 = sE_{20}.$$

Ca și la transformator, Φ este *fluxul util* care străbate ambele bobine. Fluxul care se închide în jurul unei singure bobine constituie *fluxul de scăpări* Φ_s. Se introduc asemănător reactanțele de scăpări X_s.

Scanned with CamScanner

Cuplul motor depinde de intensitatea curentului rotoric, fluxul magnetic învîrtitor și cosinusul unghiului de defazaj între curentul rotoric și t.e.m. a acestuia

$$M = C\Phi I_2 \cos \varphi_2$$

cu

$$C = \frac{4{,}44 k_2 f N_2 m_2}{\omega_1}$$

și m_2 numărul de faze ale rotorului.

De asemenea, sub alte forme

$$M = \frac{m_2 I_2^2 R_2}{\omega_1 s} = \frac{P_{Cu2}}{\omega_1 s} .$$

Scanned with CamScanner

4.
Optica

Optica este ramura fizicii care se ocupă de studiul emiterii, propagării și absorbției radiațiilor luminoase, precum și de metodele de măsurare a mărimilor corespunzătoare.

4.1. Natura luminii

Studiul proprietăților luminii se face pe baza a trei modele : ondulatoriu, corpuscular și al razelor de lumină.

1. **In modelul ondulatoriu** se pornește de la faptul că lumina este o *radiație electromagnetică* care se propagă de la o sursă care o emite datorită unei perturbații electromagnetice. Unda electromagnetică se propagă de la izvor, suprafețele de undă (*de aceeași fază*) deplasîndu-se într-un mediu omogen și izotop cu viteză (*de fază*) u constantă. Lungimea de undă λ este

$$\lambda = \frac{u}{\nu} \tag{4.1}$$

unde ν este frecvența perturbației electromagnetice. Lumina este o componentă a spectrului electromagnetic (fig. 4.1). Radiațiile spectrului diferă după lungimea de undă, ceea ce arată că perturbațiile provin de la oscilatori diferiți. Prin lumină se înțelege acea parte din spectrul electromagnetic care poate fi detectată prin simțul văzului ($\lambda \in [400, 700$ nm$]$). Această delimitare este condiționa-

Scanned with CamScanner

nată de structura ochiului (*receptor subiectiv*). Prin extindere, radiațiile infraroșu, ultraviolete și o parte din radiația X sînt incluse în domeniul opticii. Limitele fiecărui domeniu din spectru se întrepătrund cu ale domeniilor vecine.

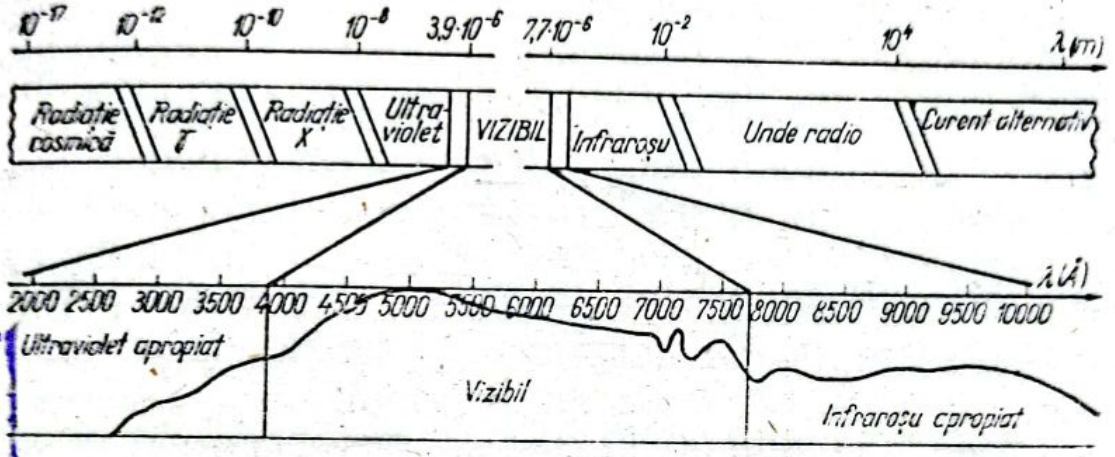


Fig. 4.1

Îngustînd domeniul spectral pînă la o lărgime convențională, oricît de mică, se obține noțiunea de *lumină monocromatică*. Aspectul ondulatoriu al luminii se manifestă preponderent în fenomenele de propagare cum ar fi: interferența, difracția, polarizarea.

2. În modelul corpuscular lumina apare ca un flux discontinuu de fotoni corpuscule. Emisia și absorbția radiației constă în emitere și absorbire de fotoni și se face, conform relației lui Planck, în cantități discrete de energie, $E = h\nu$, unde ν este frecvența radiației, iar $h = 6{,}62 \cdot 10^{-3}$ J.s[4]. este *constanta lui Planck*. Viteza de deplasare a fotonilor alcătuind o radiație monocromatică într-un mediu omogen și izotop numită și *viteză de grup* nu este aceeași cu viteza de deplasare a suprafețelor de aceeași fază, numită *viteză de fază*, a aceleiași radiații. Egalitatea are loc numai în vid. (Pentru medii obișnuite: aer, apă, sticlă cele două viteze pot fi considerate aproximativ egale. Diferența este importantă pentru mediile foarte dispersive). Fenomene ca emisia fotoelectrică, efectul Compton, scot în evidență cu precădere aspectul corpuscular al luminii.

Este imposibil să se explice integral proprietăţile luminii printr-un singur model. Lumina se comportă dual : fotonul emis (absorbit) are energia

$$\varepsilon = h\nu = mc^2 \tag{4.2}$$

şi masa

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{4.3}$$

unde c este viteza luminii în vid. Dar $c = \nu\lambda$, astfel că cele două aspecte, de corpuscul şi undă, sînt legate în relaţia

$$\lambda = \frac{h}{mc}. \tag{4.4}$$

unde λ este lungimea de undă asociată fotonului. În mod similar, lungimea de undă asociată oricărei particule care se deplasează cu o viteză de grup v poate fi calculată din relaţia

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \tag{4.5}$$

Fotonul are un impuls ($p = mc$) şi exercită o presiune asupra corpurilor iradiate. Impulsul fotonului este

$$mv = \frac{h\nu}{u} \tag{4.6}$$

Observaţii : 1. Aspectul corpuscular se manifestă predominant în domeniul frecvenţelor mai mari (începînd cu ultraviolet) pentru care se pot pune în evidenţă experimental cu mai multă claritate procesele caracteristice particulelor (fenomenul fotoelectric, de exemplu).

2. Pentru vid $u = v = c$ şi (4.6.) devine $mc = \frac{h\nu}{c}$

Scanned with CamScanner

4,2. Emisia și absorbția energiei radiante

1. **Sursele de lumină** sînt : *corpuri luminoase* — obiecte care emit lumină datorită energiei radiate prin tranzițiile energetice ale atomilor și moleculelor care le compun; *corpuri luminate* — obiecte care se văd datorită luminii reflectate.

a. În sursele cu filamente incandescente, un fir de wolfram este adus la temperatura de pînă la 3000K la care *randamentul vizual* (raportul dintre energia care impresionează retina și energia electrică totală necesară menținerii filamentului la această temperatură constantă) este cel mai mare 4,5%. La aceste surse distribuția energiei în funcție de frecvență nu poate fi controlată.

b. În sursele cu luminescență un gaz este excitat printr-un cîmp electric. Dezexcitarea determină radiația luminoasă direct sau prin intermediul unui luminofor in banda de lungimi de undă dorită. Randamentul vizual este de patru ori mai mare decît în cazul a.

2. Orice corp aflat la o temperatură superioară lui 0 K emite radiație electromagnetică datorită mișcării termice. Atunci cînd un corp emite radiații, energia lui scade. Pentru ca starea de echilibru a sistemului să nu se schimbe trebuie ca energia emisă să fie compensată ajungîndu-se la un nou echilibru în timp între corp și radiație. Orice cavitate închisă menținută la temperatură constantă este sediul unei radiații termice numită **radiație termică de echilibru sau radiația corpului negru** (fig. 4.2).

Fig. 4.2.

3. Emisia de energie este caracterizată prin **fluxul de energie radiantă** (Φ_e) care se definește prin puterea radiată de emițător (sursă)

$$\Phi_e = \frac{E}{t} \qquad (4.7)$$

Scanned with CamScanner

unde E este energia radiată în timpul t. Fiind o putere, fluxul se măsoară în waţi (W).

4. **Puterea de emisie** este fluxul de energie emis de unitatea de suprafaţă a sursei

$$W = \frac{P}{S} \tag{4.8}$$

Puterea de emisie se măsoară în waţi pe metru pătrat (W/m^2).

5. Din fluxul incident pe o suprafaţă o parte este reflectată, alta este transmisă, iar restul este absorbit. Absorbţia energiei este caracterizată de **puterea de absorbţie** (A), care este raportul dintre fluxul absorbit P' şi cel incident P

$$A = \frac{P'}{P}. \tag{4.9}$$

Dacă $A = 0$ corpul reflectă perfect, iar pentru $A = 1$ corpul este un absorbant perfect al radiaţiei (*corp absolut negru*).

6. Aceste mărimi sînt **mărimi energetice totale,** adică se referă la energia cuprinsă în tot spectrul radiaţiei emise sau absorbite. Dar energia radiantă nu este uniform repartizată în spectru. Distribuţia energiei în funcţie de frecvenţa radiaţiei este dată de *densitatea spectrală de energie* $\rho(\lambda)$, care se defineşte prin densitatea volumică de energie radiantă a radiaţiei de lungime de undă $\lambda[\lambda \in (\lambda + d\lambda)]$ ce revine unităţii de interval spectral

$$\frac{dP}{d\lambda} = \rho(\lambda). \tag{4.10}$$

Densitatea spectrală de energie depinde de temperatura corpului negru (T). Expresia ei este dată de legea

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi h}{\lambda^3} \left[e^{hc/k\lambda T} - 1\right]^{-1} \tag{4.11}$$

Scanned with CamScanner

unde h, c și k sînt constante avînd valorile : $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J.s. (constanta lui Planck); $c = 2{,}99 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s $^{-1}$ (viteza luminii în vid); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1} (constanta lui Boltzmann). Se observă că maximul funcției $\rho(\lambda, T)$ se deplasează spre lungimi de undă mai mici (frecvențe mai mari) cînd temperatura crește (fig. 4.3).

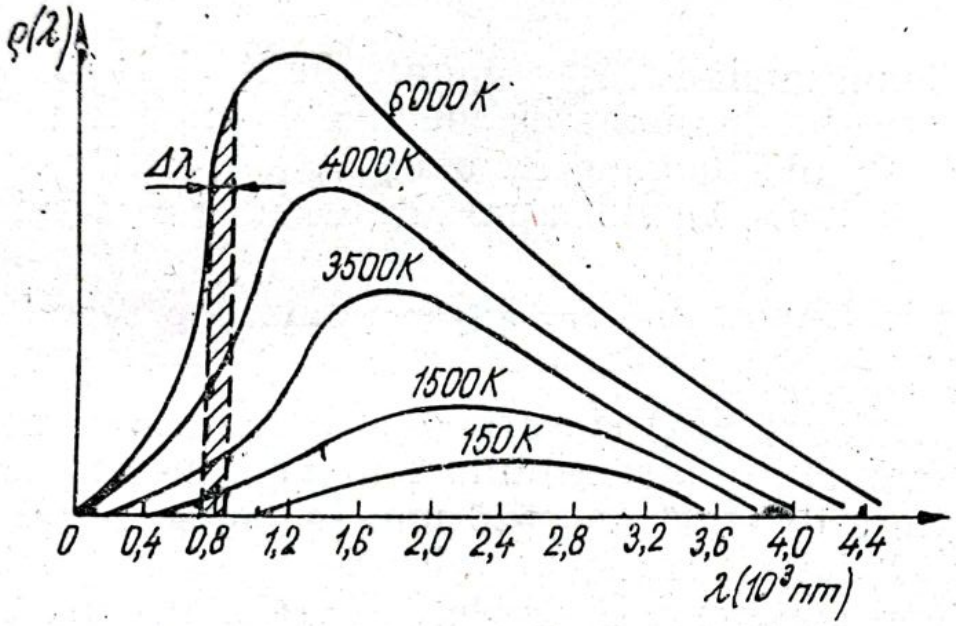


Fig. 4.3

În funcție de raportul între energia incidentă și cea absorbită sau transmisă corpurile sînt : a) *opace* (nu transmit deloc), b) *transparente* (transmisie aproape integrală) c) *translucide* (absorbție medie, împrăștiere importantă).

În cazul absorbției, intensitatea energetică $I (I = \frac{\Phi_e}{S})$ a unei radiații incidente $I_0 (I_0 = \frac{\Phi_{e0}}{S})$ după ce străbate o grosime x din substanță este

$$I = I_0 \, e^{-\alpha x}, \qquad (4.12)$$

α fiind coeficientul de absorbție (Legea lui Lambert).

Scanned with CamScanner

4.3 Fotometrie

Măsurarea energiei radiante și a efectelor pe care le produce este obiectul *fotometriei*. Măsurarea se poate face cu un receptor obiectiv (*fotometrie fizică*) sau cu un receptor subiectiv (*fotometrie vizuală*). Următoarele mărimi sînt mărimi fotometrice subiective :

1. **Fluxul luminos** (Φ_λ) Suprafețele A și B din figura 4.4, a care sînt luminate cu un flux de energie radiantă constant Φ_0 (de lungime de undă λ_0), respectiv Φ_λ (de lungime de undă λ), sînt apreciate de ochi ca fiind la fel luminate. Raportul $\frac{\Phi_0}{\Phi_\lambda} = V_\lambda$ se numește *sensibilitate spectrală relativă* (V_λ) și variază cu lungimea de undă λ. Ochiul omului are o sensibilitate maximă pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda = 555$ nm. În cazul acestei radiații $V_\lambda = 1$, iar pentru toate celelalte $V_\lambda < 1$ (fig. 4.4, b). În vedere crepusculară curba V_λ este deplasată spre

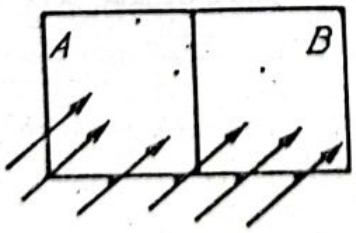


Fig. 4.4.a

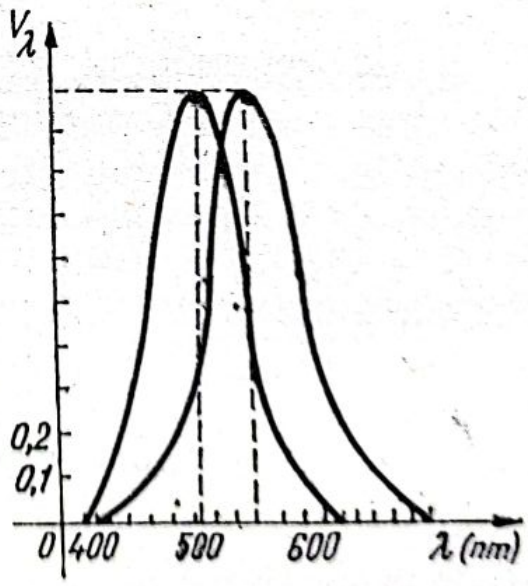


Fig. 4.b.4

stînga în raport cu aceea pentru vedere diurnă. Fluxul luminos caracterizează capacitatea fluxului de energie

Scanned with CamScanner

radiantă monocromatică Φ_λ de a produce senzația de lumină

$$\Phi = kV_\lambda \Phi_\lambda \tag{4.13}$$

k fiind un coeficient care depinde de alegerea unităților.

2. Intensitatea luminoasă (I). Dacă punctul A, care este un oscilator al suprafeței luminoase, emite un flux luminos $d\Phi$ în unghiul solid $d\Omega$ (fig. 4.5), cîtul dintre fluxul emis și unghiul solid în care se emite acest flux definește intensitatea luminoasă

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{4.14}$$

Aceasta este o mărime fundamentală a Sistemului Internațional de unități (SI). Unitatea de măsură se numește *candelă*. O suprafață dintr-un corp absolut negru de arie 1 : 600 000 m²; aflată la temperatura de 2046 K și presiune normală, emite pe o direcție perpendiculară o radiație a cărei intensitate este o candelă (cd).

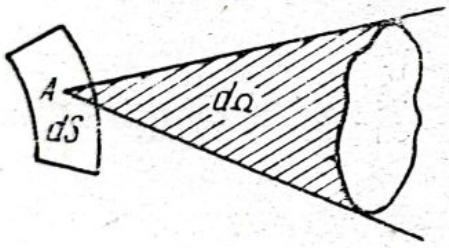


Fig. 4.5

Unitatea de flux iluminos derivă din

$$[d\Phi] = [I]\,[d\Omega] = \text{cd} \cdot \text{sr} = \textit{lumen}\ (\text{lm}).$$

Lumenul este fluxul luminos emis de o sursă luminoasă punctiformă de o candelă într-un unghi solid de un steradian (sr).

Constanta k din relația (4.13) are valoarea experimentală $k = 692$ lm/W.

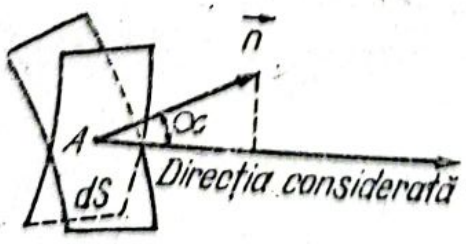


Fig. 4.6

3. Luminanța (strălucirea) este raportul dintre intensitatea luminoasă dI a sursei de arie dS (care conține punctul A) pe o direcție oarecare și proiecția ariei suprafeței pe direcția dată (fig. 4.6).

Scanned with CamScanner

$$B = \frac{dI}{dS \cos \alpha} \tag{4.15}$$

Unitatea de luminanţă (strălucire) este *nitul* (nt) : 1nt = =1cd/m² (strălucirea unei suprafeţe de 1 m² care emite uniform pe direcţia normalei o intensitate luminoasă de o candelă).

4. **Iluminarea** (E). Caracterizează suprafeţele luminate şi este raportul dintre fluxul luminos $d\Phi$ primit de suprafaţa de arie dS şi aria suprafeţei

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{4.16}$$

Iluminarea pe o suprafaţă variază direct proporţional cu cosinusul unghiului i dintre direcţia fluxului luminos şi normala n la suprafaţa luminată (fig. 4.7).

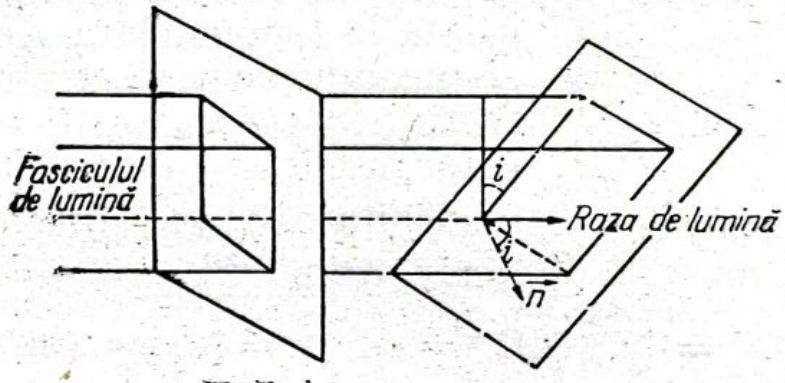


Fig. 4.7

$$E = \frac{I}{r^2} \cos i \tag{4.17}$$

unde r este distanţa de la sursă la suprafaţa luminată. Pentru $i = 0$,

$$E = \frac{I}{r^2} \tag{4.17'}$$

adică iluminarea unei suprafeţe variază invers proporţional cu pătratul distanţei de la sursă.

Scanned with CamScanner

În cazul a două surse de intensităţi I_1 şi I_2, aşezate la distanţele r_1 şi r_2 faţă de o suprafaţă egal luminată de cele două surse, este satisfăcută relaţia

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2} \qquad (4.17'')$$

pe care se bazează principiul de construcţie a fotometrelor — aparatele utilizate în măsurări fotometrice — folosindu-se informaţia pe care o dă ochiul din compararea a două suprafeţe egal iluminate.

Unitatea de ilumiare este *luxul* (lx) :

$$[E]_{SI} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx}.$$

Relaţia (4.17'') permite calcularea intensităţii unei surse cînd se ştie intensitatea celeilalte.

4.4. Propagarea luminii

1. **Raza de lumină.** De la un punct-sursă lumina se propagă în toate direcţiile. Dacă mediul este omogen şi izotrop undele sînt sferice ; o dreaptă de propagare a unei unde este o *rază*. Razele provenite de la o sursă punctiformă sau care converg într-un punct, delimitate într-un unghi solid, formează un *fascicul conic divergent* (fig. 4.8, a), respectiv *convergent* (*homocentric*) (fig. 4.8, b).

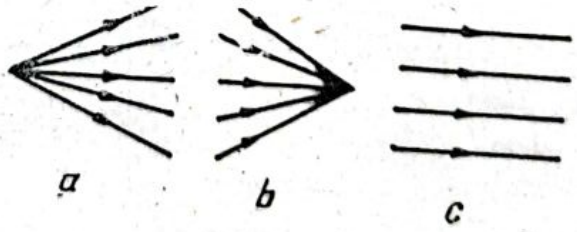


Fig. 4.8

Razele paralele formează un fascicul *cilindric* sau *paralel* (fig. 4.8, c). Într-un mediu omogen şi izotrop frontul de undă şi suprafeţele de undă pentru un fascicul conic sînt porţiuni de sferă, iar pentru fasciculul paralel sînt plane.

Scanned with CamScanner

Un fascicul de unde plane foarte îngust materializează o rază. Într-un mediu omogen raza este o dreaptă.

Umbra proiectată pe ecran prin interpunerea unui obiect opac C în calea unui fascicul provenit de la o sursă luminoasă punctiformă S este de iluminare uniformă (fig. 4.9, a). Sursa nepunctiformă S din fig. 4.9, b proiectează o umbră de iluminare variabilă. În regiunea de penumbră sursa nu este în întregime ascunsă observatorului. *Eclipsele* pot fi explicate prin propagarea rectilinie a luminii.

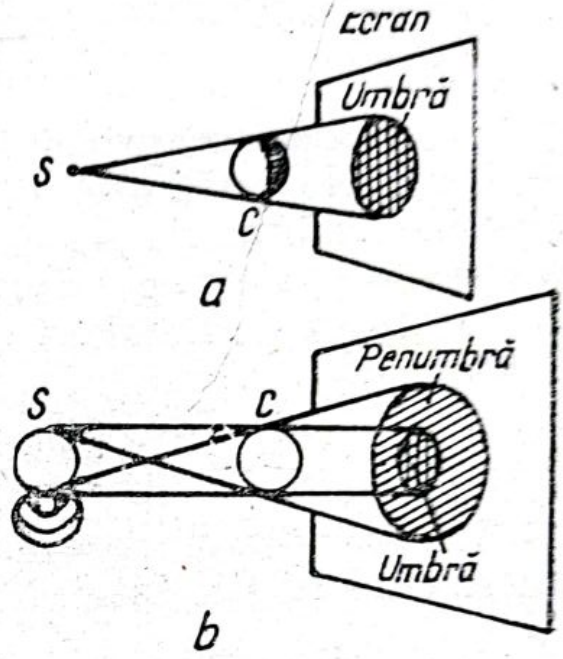


Fig. 4.9

Figura 4.9, de exemplu, poate fi interpretată ca o schiță pentru explicarea: a) unei eclipse de Soare dacă S este Soarele, C Luna, iar ecranul o porțiune a suprafeței Pământului; b) unei eclipse de Lună dacă S este Soarele, C Pământul, iar undeva, în conul penumbrei sau umbrei, se găsește Luna. Conurile de umbră determină eclipse totale, iar cele de penumbră eclipse parțiale.

Printr-o deschidere îngustă se poate obține imaginea obiectului luminos în *camera obscură* (fig. 4.10). Îngustarea obstacolului sau a deschiderii modifică mersul

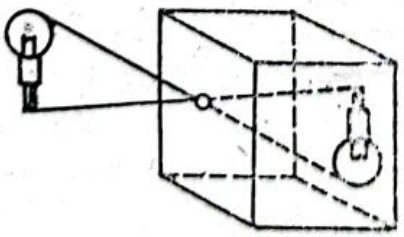


Fig. 4.10

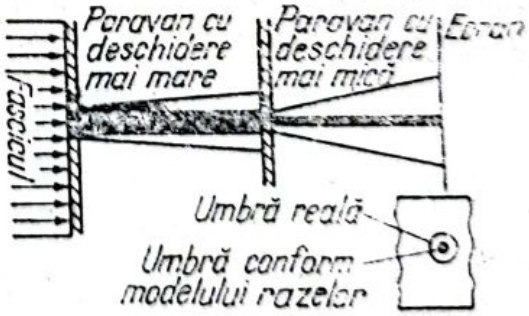


Fig. 4.11

rectiliniu al razelor. În realitate, datorită fenomenului de difracție pe marginea obstacolului sau a fantei, umbra

Scanned with CamScanner

nu e netă (fig. 4.11). Fenomenul de difracţie este mai pronunţat pe măsură ce $d/\lambda \to 0$ (fig. 4.12), unde d este diametrul deschiderii, iar λ, lungimea de undă a radiaţiei incidente pe acea deschidere.

Observaţie: Optica geometrică, bazată pe modelul razei de lumină, este o aproximaţie a opticii ondulatorii pentru lungimi de undă mici comparativ cu dimensiunile obiectelor care limitează fasciculele de lumină. Raza de lumină este, geometric, curba normală în fiecare punct al suprafeţei de undă corespunzătoare.

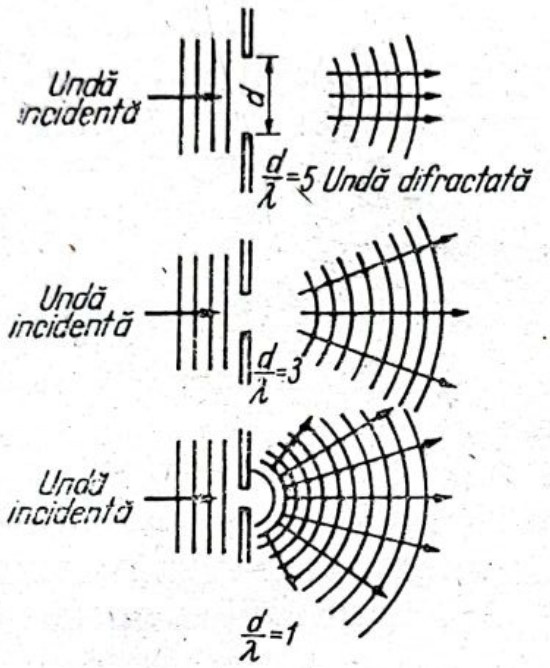


Fig. 4.12

2. **Viteza luminii** a) *În aer* (*metoda lui Michelson*) (fig. 4.13). Raza de lumină emisă de sursă este văzută în lunetă după reflexiile pe oglinzile *1*, *2''*, *2'*, şi *3*. Cînd oglinda octogonală se roteşte, pentru a vedea raza trebuie ca timpul în care se parcurge distanţa AB dus şi întors să fie egal cu timpul necesar pentru ca, în rotaţie, o faţă a oglinzii turnante să fie înlocuită cu următoarea $\left(\frac{1}{8}T\right)$ unde T este perioada—constantă—de rotaţie a oglinzii. Adică,

$$c = \frac{2AB}{\frac{1}{8}T},$$

unde AB este *drumul optic*.

b) *În vid.* Aceeaşi metodă aplicată cu un dispozitiv în care razele reflectate au fost trecute printr-un tub (vidat 1450 m) dă $c_0 = 299790$ km/s. Ambele metode con-

Scanned with CamScanner

firmă valoarea vitezei calculată pe cale teoretică de Maxwell aplicînd relaţia

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}.$$

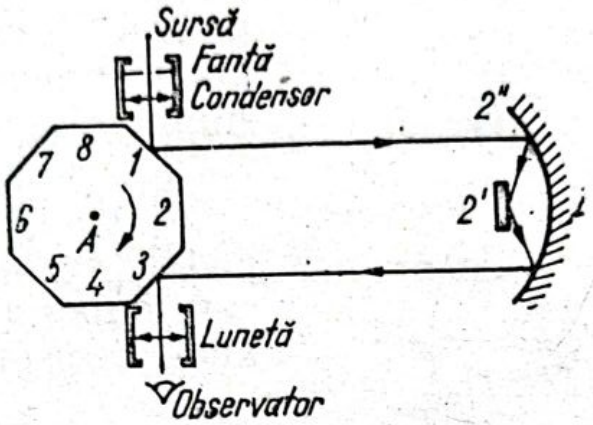


Fig. 4.13

Valoarea acceptată $c_0 = 2{,}9979246 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1} \pm 2\mathrm{ms}^{-1}$.

În această relaţie ε_0, ε şi ε_r sînt, respectiv, permitivităţile electrice absolute a vidului, a mediului optic de propagare şi permitivitatea relativă a mediului $\left(\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$; μ_0, μ şi μ_r sînt permeabilităţile magnetice absolută a vidului. a mediului de propagare şi permiabilitatea relativă a mediului optic.

Observaţie: Deoarece μ_0 este exact $4\pi 10^{-7}\,\mathrm{Ns^2C^{-2}}$, iar viteza luminii este determinată cu o mult mai mare precizie decît forţa dintre două corpuri electrizate, relaţia precedentă este utilizată pentru determinarea constantei:

$$\varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}\right).$$

4.5. Reflexia luminii

Fenomenul constă în întoarcerea undelor în mediul în care s-au propagat, la întîlnirea unei suprafeţe de separaţie dintre acest mediu şi un altul.

Scanned with CamScanner

Numai o parte din energia incidentă este reflectată de un material oarecare. Procentul de energie reflectată depinde de material, de aspectul suprafeţei (netezirea ei) şi de unghiul de incidenţă. Din fasciculul incident, paralel, o parte se transmite restul este reflectat, împrăştiat sau difuzat datorită fie asperităţilor suprafeţei, fie neomogenităţilor (fig. 4.14). O suprafaţă sau un mediu poate fi *difuzant* pentru o radiaţie de o anumită lungime de undă şi nedifuzant pentru altă lungime de undă : în acest ultim caz, lumina suferă o *reflexie regulată*.

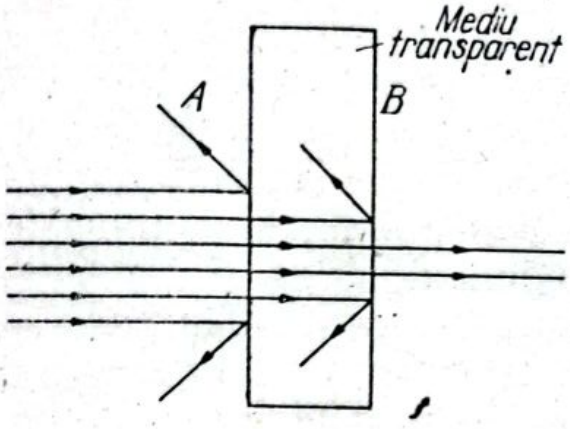


Fig. 4.14

Pentru radiaţia a cărei lungime de undă este de ordinul de mărime al particulelor care alcătuiesc mediul, sau mai mică, mediul respectiv este netransparent. Acest fapt constituie o explicaţie pentru culoarea albastră a cerului (moleculele din partea superioară a atmosferei difuzează în special radiaţiile cu lungimi de undă mici).

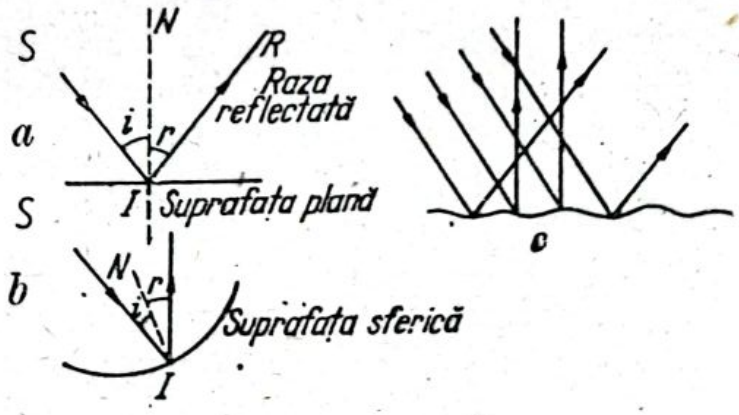


Fig. 4.15

Legile reflexiei. a) Razele : incidentă SI, reflectată (IR) şi normala la suprafaţă NI sînt în acelaşi plan.

b) Unghiul de incidenţă i şi unghiul de reflexie r sînt egale (fig. 4.15, a, b). Legile sînt valabile pentru unde de toate formele, rază fiind dreapta de propagare

Scanned with CamScanner

normală pe frontul de undă în punctul de incidenţă. Difuzia este reprezentată în figura 4.15, c).

4.6. Refracţia luminii

1. **Indice de refracţie relativ.** Viteza luminii depinde de mediul în care se propagă. Unda plană monocromatică care atinge suprafaţa de separaţie a două medii de densitate diferită se separă : o undă revine în mediul în care s-a propagat unda (reflexie), a doua trece în al doilea mediu şi, în general se schimbă direcţia de propagare (refracţie) (fig. 4.16 a). Viteza luminii în mediu 12 fiind v_2, în timp ce unda străbate distanţele AI_1, BI_2, CI_3 cu viteza v_1,

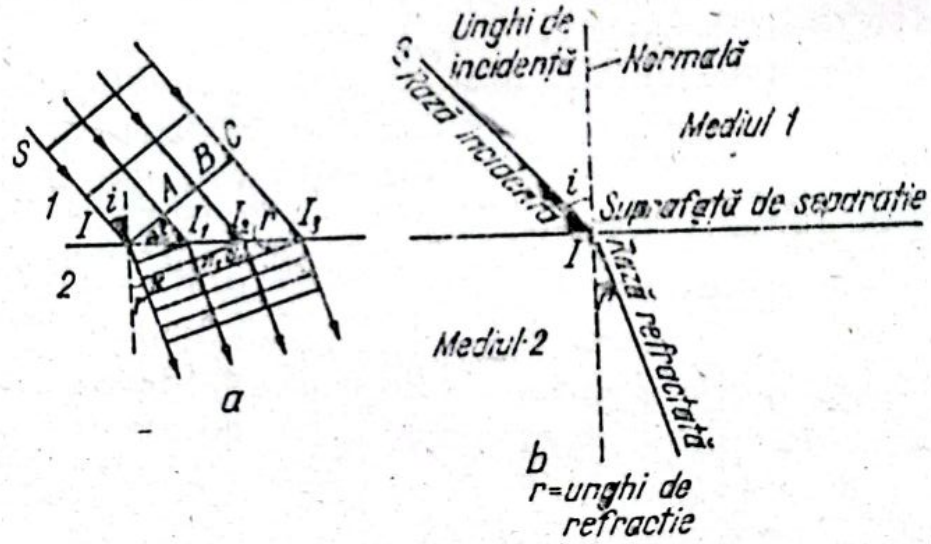


Fig. 4.16

oscilaţiile pornite din I, I_1, I_2, străbat distanţele IR, I_1A_1, I_2B_1. Noul front de undă RI_3 este perpendicular pe IR. Raportul

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{21} \qquad (4.18)$$

se numeşte *indice de refracţie relativ* al mediului 2 faţă de 1 şi descrie modificarea unghiului prin refracţie.

Indicele de refracţie este cuprins între 1 (aerul) şi 2,7 (dioxidul de titaniu cristalizat).

Scanned with CamScanner

Observaţii : 1. Sensul razei de lumină este reflexibil. Incidenţa şi reflectata sau refractata îşi pot schimba rolurile. 2. În cazul în care lumina trece din vid (viteza c) într-un mediu oarecare (viteza v), 4.18 dă posibilitatea definirii indicelui de refracţie absolut :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{v} = n \qquad (4.18')$$

2. **Legile refracţiei.** a) Raza incidentă, normala şi raza refractată sînt coplanare.

b) Indicele de refracţie este independent de unghiul de incidenţă (fig. 4.16, b). Dacă $i > r$ mediul *2* este mai *refringent* decît *1*, şi invers. Dacă mediul *1* este vid, indicele de refracţie se numeşte *absolut*

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{c_0}{c_2}}{\frac{c_0}{c_1}} = \frac{n_2}{n_1} \text{ sau } n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad (4.19)$$

sau, în general,

$$n \sin i = \text{const.}$$

În seamnă că produsul între indicele de refracţie absolut şi sinusul unghiului de incidenţă este un invariant.

Energia razei incidente se regăseşte în energiile razelor reflectată şi refractată aflate într-un raport depinzînd de unghiul de incidenţă.

3. **Drumul optic.** Într-un mediu de indice de refracţie absolut n lungimea d' este parcursă de lumină într-un timp $t = d'v$ unde v este viteza luminii în mediul considerat.

Scanned with CamScanner

în același interval de timp, lumina ar parcurge în vid distanța

$$d = c \cdot t = c\frac{d'}{v} = nd' \qquad (4.20)$$

numită *drum optic*.

4. **Reflexia totală.** Cînd raza trece prin suprafața de separație dintre un mediu refringent și altul mai puțin

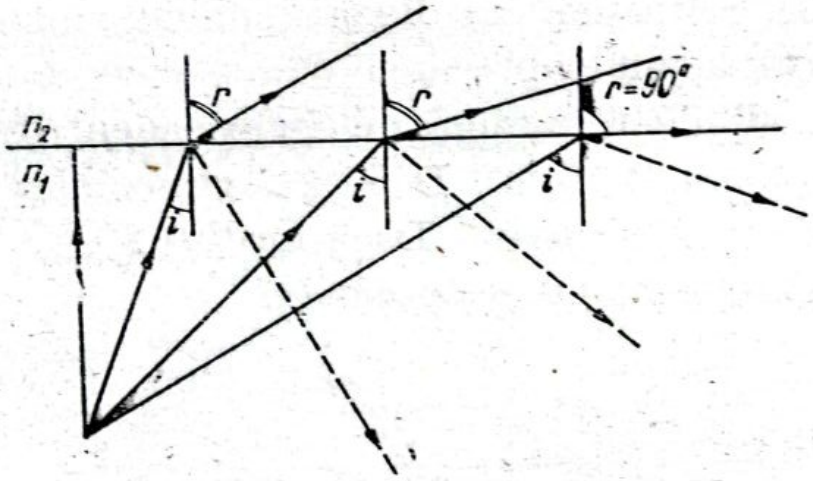


Fig. 4.17,*a*

refringent, $i < r$. Dacă $r = 90°$ toată energia razei incidente se găsește în energia razei reflectate (reflexie totală). Unghiul de incidență l, care se numește în acest caz unghiul limită (fig. 4.17), se poate calcula din

$$\sin l = \frac{n_2}{n_1} \qquad (4.21)$$

și are o valoare determinată pentru două substanțe cu o suprafață comună.

Dacă o rază de lumină pătrunde prin capătul unui tub lung cilindric transparent cu indicele de refracție mai mare decît mediul înconjurător, ea se reflectă total, pe pereții tubului, întreaga energie regăsindu-se în raza emergentă.

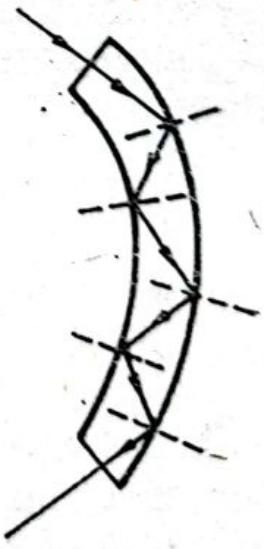
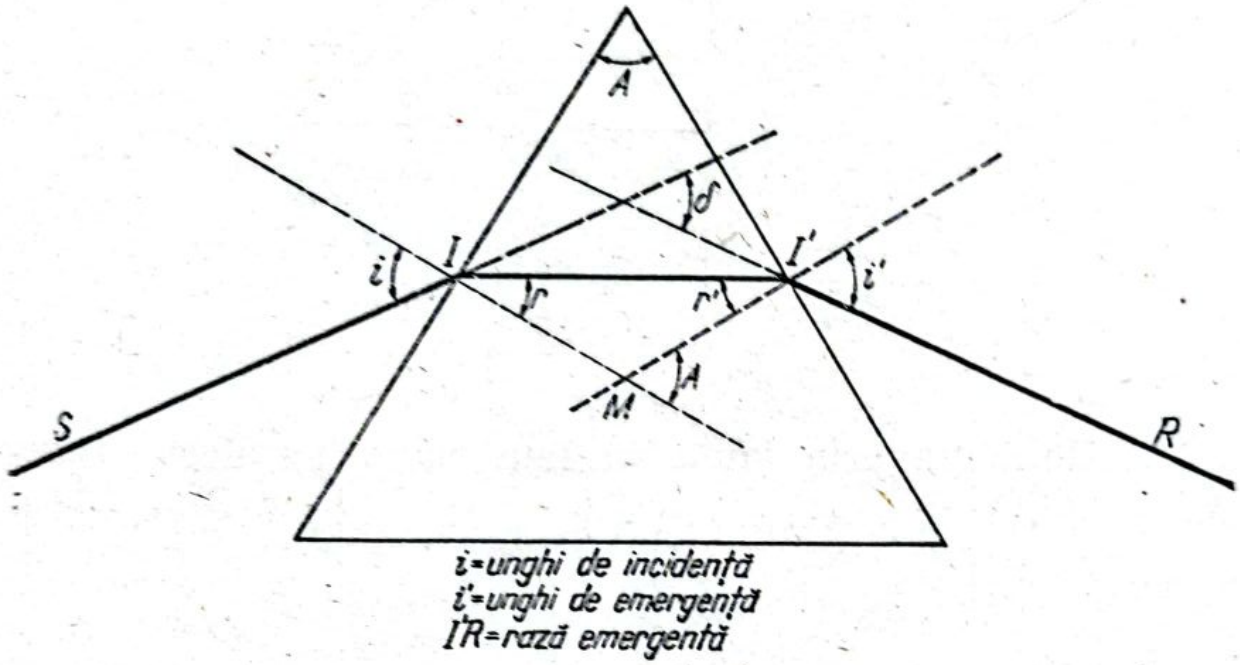


Fig.4.17,*b*

Scanned with CamScanner

Tubul este o fibră optică (fig. 4.17, b). Aceasta este un ghid de lumină și poate fi folosit în tehnică pentru transmiterea informației de la un capăt la celălalt.

5. Refracția printr-o prismă. Unghiul de deviere al unei raze monocromatice este (fig. 4.18)



i=unghi de incidență
i'=unghi de emergență
I'R=rază emergentă

Fig. 4.18

$$\delta = i + i' - A. \tag{4.22}$$

Condiția de emergență : $A < 2l$, l fiind unghiul limită. Deviația minimă se realizează petru un mers simetric al razelor ($i = i'$ și $r = r'$) și este dată de

$$\delta = 2i - A \,(A = 2r) \tag{4.22'}$$

Cunoscîndu-se unghiul A și deviația minimă se poate determina indicele de refracție al prismei

$$n = \frac{\sin \dfrac{A + \delta_{min}}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}. \tag{4.23}$$

Scanned with CamScanner

În cazul unei prisme având secțiunea principală un triunghi dreptunghic isoscel, $A > 2l$; se produce reflexie totală (fig. 4.19).

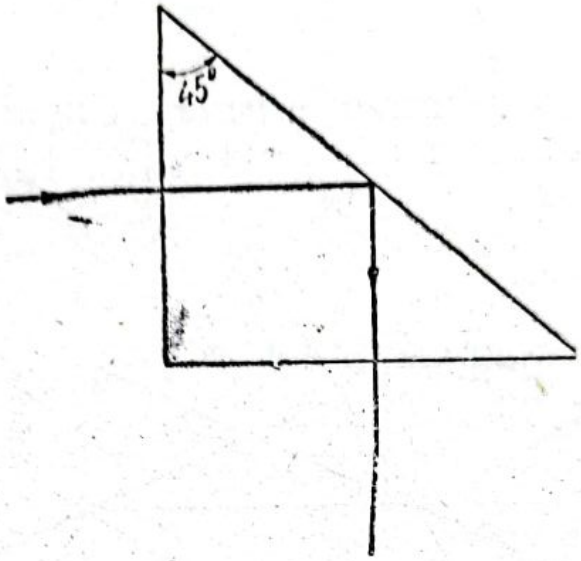


Fig. 4.19

6. Refracția prin lama cu fețe plane paralele. Raza trece nedeviată, dar deplasată cu distanța d (fig. 4.20).

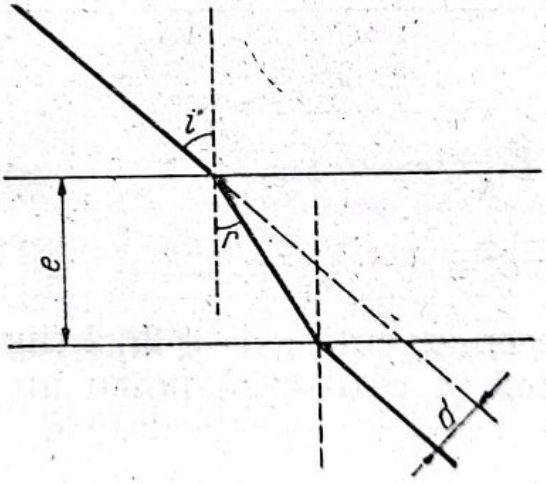


Fig. 4.20

$$d = e\frac{\sin\ (i - r)}{\cos\ r}, \qquad (4.24)$$

7. Dispersia luminii. a) La trecerea prin prismă a unui fascicul de lumină de la Soare sau de la un corp incandescent se produce fenomenul de *dispersie* (fig. 4.21, a, stînga) prin care se descompune radiația incidentă în șapte radiații componente elementare: roșu, portocaliu galben, verde, albastru, indigo, violet. Trecerea de la o

culoare la alta se face continuu prin nuanțe intermediare. Faptul că radiațiile obținute sînt elementare se demonstrează prin imposibilitatea dispersării unui fascicul component (fig. 4.21, a, dreapta). Explicația constă în dependența vitezei luminii (și a indicelui de refracție) de frecvența radiațiilor care trec prin prismă. Legea de variație este dată de relația lui Cauchy

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^2} + \ldots \qquad (4.25)$$

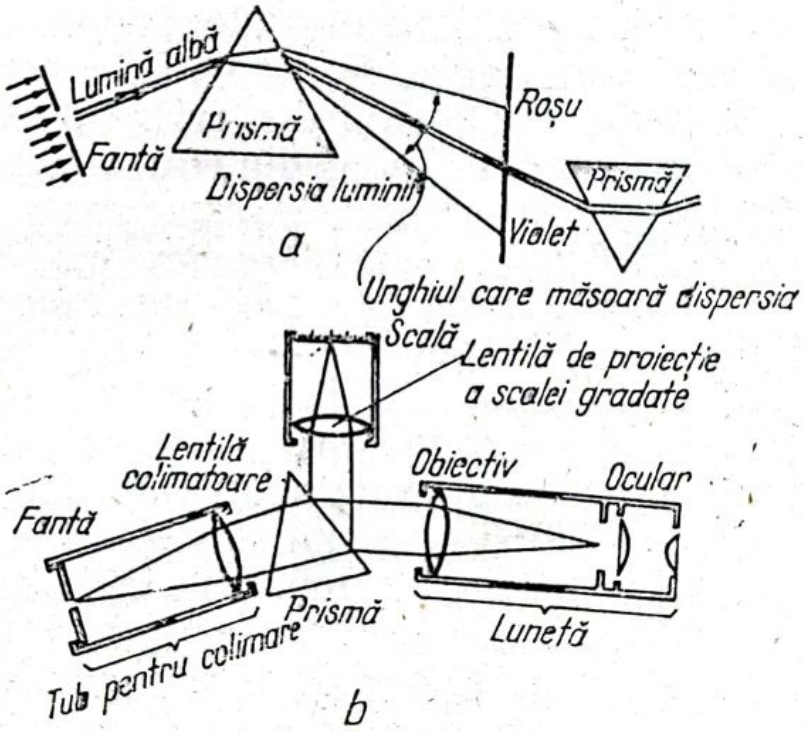


Fig. 4.21

valabilă pentru substanțele cu *dispersie normală* (sînt și substanțe la care n crește cînd λ crește—*dispersia anormală* — ca la iod). În tabelul următor se dau valori ale indicelui de refracție al sticlei crown pentru cîteva radiații monocromatice :

Culoarea	Sticlă
Roșu	1,515
Galben	1,517
Albastru	1,523
Violet	1,533

Scanned with CamScanner

Diferența indicilor de refracție ai unei substanțe pentru radiațiile extreme ale spectrului sau diferența unghiurilor de deviere pentru aceste radiații este o măsură a dispersivității substanței.

Culoarea este o proprietate care depinde de frecvența luminii. Perechile de culori sau nuanțe care prin compunere dau lumina albă se numesc *complementare.*

b) Figura obținută prin dispersia luminii este un ansamblu de benzi corelate, imagini ale fantei și se numește *spectru.* (Același termen este utilizat și pentru mulțimea valorilor pe care le ia o mărime fizică oarecare (în optică, frecvența sau lungimea de undă a radiațiilor electromagnetice; a se vedea fig. 4.1).

Spectrul de emisie este spectrul rezultat din dispersia radiației emise de o sursă pe un mediu transparent, pentru intervalul de frecvențe cercetat. Acesta poate cuprinde toate radiațiile într-un interval (*spectru continuu*) sau numai anumite subintervale de frecvențe (*spectre discontinue*). Subintervalele pot fi relativ largi (*spectre de benzi*) sau înguste (*de linii*). Dacă între sursa care emite radiația analizată și aparatul care analizează se află un mediu netransparent (absorbant) pentru un anumit interval de frecvențe, se obține un *spectru de absorbție.*

Corpurile solide sau lichide încălzite emit un spectru cotinuu de radiații. Gazele excitate emit spectre discontinue : de benzi, dacă gazul este în stare moleculară și de linii, dacă starea lui este atomică. Spectrele discontinue sînt caracteristice substanței.

Analiza spectrelor este o metodă pentru a obține informații cu privire la : a) natura substanțelor necunoscute (*analiza spectrală calitativă*) b) concentrația substanțelor (*analiza spectrală cantitativă*). Analiza spectrală se face cu *aparate spectrale.*

c) *Spectroscopul* este un aparat spectral. Piesa dispersivă poate fi o prismă sau o rețea de difracție prin transmisie. Mediul dispersiv trebuie să fie adecvat radiației analizate. Spectroscopul cu prismă este arătat în fig. 4.21, b.

La *spectrografe* se înlocuiește ocularul printr-un film. Se obține o *spectrogramă.*

Scanned with CamScanner

Caracteristică pentru aparatele spectrale este *puterea de rezoluție*

$$P = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

în care λ este media aritmetică a lungimilor de undă a două radiații percepute distinct, iar $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ intervalul spectral corespunzător acestor radiații.

d) Analiza spectrelor de linii, de exemplu, arată că există o regularitate și o constanță a dispunerii liniilor în anumite *serii*. Experimental s-a stabilit. că succesiunea frecvențelor liniilor observate de exemplu în spectrul hidrogenului poate fi obținută din relația

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (4.26)$$

unde R este constanta lui Rydberg, iar n și m două numere întregi. Pentru fiecare n, se obține dînd diferite valori lui $m(m > n)$ o succesiune (serie) de linii.

Observație. Legile reflexiei și refracției care apar în optica geometrică ca fiind rezultate din experiență pot fi deduse matematic din două principii :

Principiul lui Huygens (modelul ondulatoriu) : orice punct de pe frontul de undă este un nou centru de oscilație producînd unde secundare.

Principiul lui Fermat : o rază de lumină străbate de la un punct la altul un drum astfel încît, comparat cu drumurile alăturate, timpul în care îl străbate este sau minim, sau maxim, sau staționar.

Notînd cu n_1, n_2... indicii de refracție absoluți ai mediilor străbătute de lumină cu vitezele v_1, v_2..., cu l_1, l_2... lungimile geometrice ale drumurilor în mediile corespunzătoare și cu c viteza luminii în vid, raza străbate drumul optic L

$$L = \frac{c}{v_1} l_1 + \frac{c}{v_2} l_2 + \ldots = n_1 l_1 + n_2 l_2 + + \ldots = \sum_{i=1} n_i l_i.$$

Scanned with CamScanner

În acest caz principiul lui Fermat se scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} n_i l_i = 0 ,$$

însumîndu-se de la primul la ultimul mediu.

4.7. Dioptrul

Instrumentele optice cu care se lucrează mai frecvent sînt *sisteme optice centrate*. Părţile constitutive ale acestora — lentilele, oglinzile — formează o succesiune de medii omogene şi transparente separate de suprafeţele sferice, toate cu vîrfurile şi centrele de curbură pe aceeaşi dreaptă, *axa optică principală*

Ansamblul format din două medii transparente, omogene şi izotrope cu indici de refracţie deosebiţi,

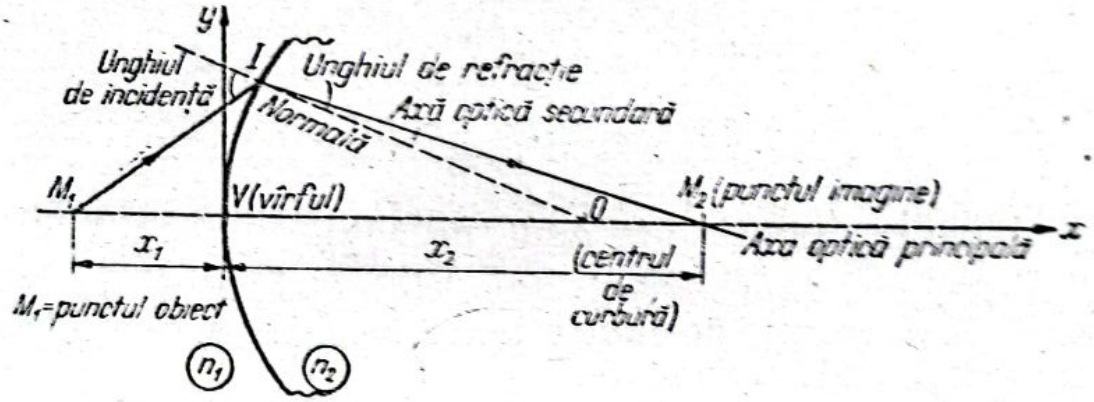


Fig. 4.22

se numeşte dioptru. Suprafaţa separatoare poate fi: a) sferică (*dioptrul sferic*); b) plană (*dioptrul plan*). Dioptrii de altă formă sînt dificil de fabricat.

1. Dioptrul sferic. (Elementele se văd în fig. 4.22.)

Întrucît există o mare varietate de poziţie ale punctelor obiect şi imagine sînt necesare un reper în raport cu care să se măsoare diatanţele şi o convenţie corespunzătoare de semne.

Scanned with CamScanner

S-au imaginat multe convenţii. Dintre acestea prezentăm *Convenţia geometrică* (sistemul cartezian de coordonate).

Se consideră un sistem de coordonate rectangulare avînd originea în vîrful V al suprafeţei sferice, cu axa absciselor coincizînd cu axa optică a dioptrului, avînd sensul pozitiv în sensul convenţional ales pentru propagarea luminii (de la stînga la dreapta). Axa ordonatelor are sensul pozitiv în sus, (figura 4.22). În raport cu acest sistem, distanţele care se referă la obiect şi imagine, axa de curbură şi distanţa focală au semnul considerat în funcţie de sensul geometric. Orice segment aflat deasupra axei este pozitiv ; cînd este situat dedesubtul axei este negativ. În raport cu suprafaţa sferică separatoare a fiecărui dioptru spaţiul se împarte în *spaţiu obiect* regiunea în care se află obiectul şi, *spaţiu imagine* regiunea cealaltă în care se află imaginea. Prin trecerea luminii prin dioptri succesivi, sînt posibile două cazuri pentru obiect ; aceasta să se afle în spaţiul obiect (stînga —*obiect real*—) sau în spaţiul imagine (dreapta — *obiect virtual*). Pentru imagine sînt posibile tot două cazuri (imaginea se află în spaţiul imagine (dreapta — *imagine reală*) sau se formează în spaţiul obiect (stînga — *imagine virtuală*).

În cele ce urmează toate formulele sînt scrise pentru a fi utilizată convenţia geometrică.

Considerînd fasiculele cu deschidere foare mică (paraxiale) se găsesc următoarele relaţii fundamentale :

a) *Relaţia punctelor conjugate*

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}\,; \tag{4.27}$$

— cînd $x_1 \to \infty$, $x_2 = \dfrac{n_2 R}{n_2 - n_1} = f_2$,

numită *distanţa focală imagine*

— cînd $x_2 \to \infty$, $x_1 = -\dfrac{n_1 R}{n_2 - n_1} = f_1$,

numită *distanţa focală obiect.*

Scanned with CamScanner

Dioptrul sferic are două *focare*. Raza care vine paralel cu axa optică principală, după străbaterea dioptrului trece prin focar (*real*) sau prelungirea razei intersectează axa în focar (*virtual*).

Dacă după trecerea prin dioptru un fascicul divergent devine convergent, punctul de convergenţă se numeşte *imagine* a punctului de divergenţă al fasciculului. În acest caz unui punct *obiect* îi corespunde un punct imagine; imaginea este *stigmatică*, iar dioptrul este un *sistem stigmatic*. Imaginea poate fi punctul de intersecţie a unor raze (*imagine reală*) sau a prelungirilor razelor (*imagine virtuală*). Imaginea unui obiect nepunctiform se compune din mulţimea imaginilor tuturor punctelor care alcătuiesc obiectul.

În general, stigmatismul nu se realizează perfect. Unui punct obiect îi corespunde ca imagine o pată. Pentru ca imaginea (unui punct) să apară ca un punct separat este necesar ca dimensiunea lui să nu depăşească dimensiunea granulaţiei receptorului (retina sau filmul fotografic).

b) *Mărirea liniară* (β) este raportul între mărimea imaginii y_2 şi a obiectului y_1 (fig. 4.23).

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}. \qquad (4.28)$$

c) *Mărirea unghiulară* (γ) este definită (fig. 4.23) prin

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1 n_1}{y_2 n_2}.$$

unde u_1 şi u_2 sînt unghiurile sub care se vede obiectul cu ochiul liber, respectiv, cu ajutorul dioptrului.

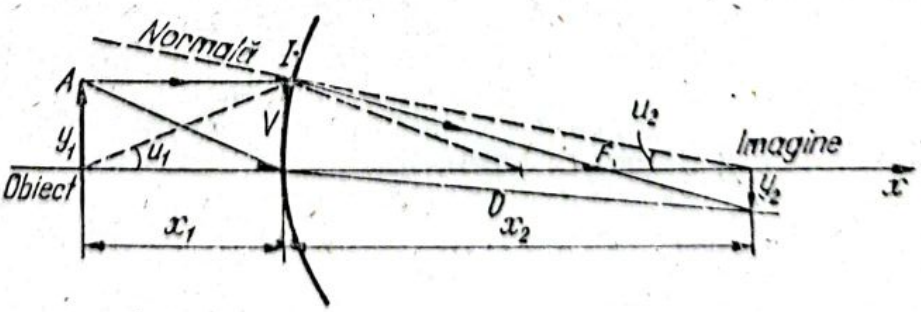


Fig. 4.23

Scanned with CamScanner

2. **Dioptrul plan.** Din relaţiile fundamentale ale dioptrului sferic se obţine, făcînd $R \to \infty$:

a) *Relaţia punctelor conjugate*

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1}. \tag{4.29}$$

Distanţele focale devin infinite: $f_2 = +\infty$, $f_1 = -\infty$. Dioptrul plan nu focalizează.

b) *Mărirea transversală* este $\beta = 1$. (4.28 şi 4.29) Imaginea şi obiectul sînt egale, iar imaginea e dreaptă.

Cele mai importante instrumente optice utilizate pentru formarea imaginilor sînt alcătuite din sisteme de dioptrii centraţi, adică avînd toate vîrfurile şi centrele de curbură pe o dreaptă — *axa optică principală*.

4.8. Aplicaţii

1. **Oglinzi.** Oglinzile sînt *plane* sau *sferice* (uneori parabolice). În relaţiile dioptrului raza întorcîndu-se în mediul în care s-a propagat $n_2 = -n_1$. (convenţional).

a) *Oglinda plană.* Din (4.29) rezultă $x_2 = -x_1$. Cum, fig. 4.24 a, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ imaginea este simetrică faţă de obiect în raport cu oglinda şi dreaptă ($\beta = 1$).

Orice punct-sursă emite un fascicul divergent (unde sferice) care după reflexie are centrul în punctul imagine (virtual). Grafic, acesta poate fi găsit cu două raze, aplicînd legile reflexiei (fig. 4.24, a).

Undele plane sau sferice rămîn plane sau sferice (fig. 4.24, b).

b) *Oglinda sferică* Din (4.27), scriind convenţional $n_2 = -n_1$, se obţine relaţia punctelor conjugate

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \tag{4.30}$$

Scanned with CamScanner

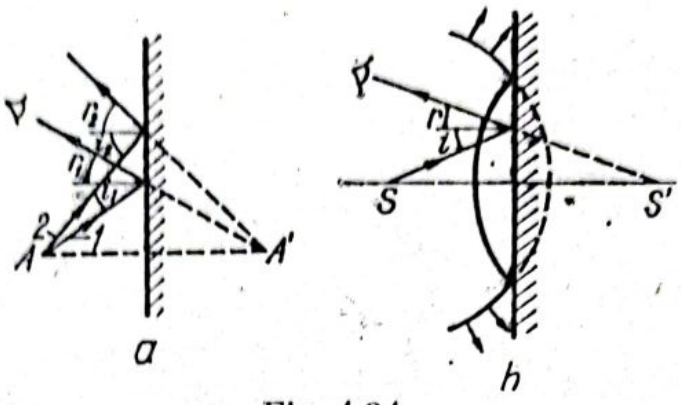


Fig. 4.24

focarul fiind la distanţa $f_1 = f_2 = \frac{R}{2}$. Imaginea este de aceeaşi parte cu obiectul ($a_2 < 0$).

Elementele unei oglinzi sferice sînt indicate în fig. 4.25. Unda plană este transformată în undă sferică avînd

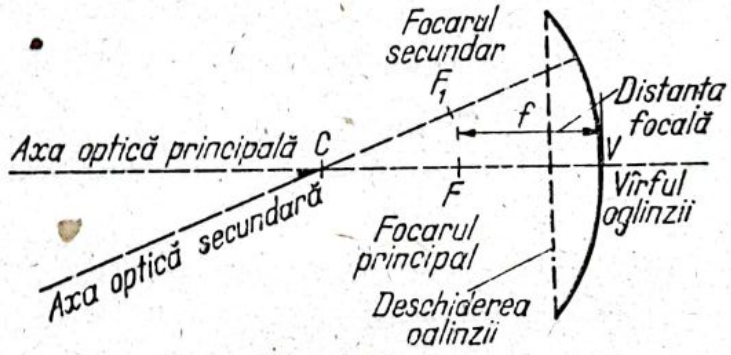


Fig. 4.25

centrul în focarul real (*oglinda concavă*, fig. 4.26, a) sau virtual (*oglindă convexă*, fig. 4.26, *b*). Imaginea, construită după legile reflexiei, se găseşte la intersecţia a două raze reflectate (*1* şi *2*, fig. 4.27, *a*) sau la prelungirea celor două raze (fig. 4.27, *b*, *c*). Se aleg razele : incidenta paralelă cu axa principală (*1*) şi incidenta pe direcţia centrului de curbură (*2*).

Felul cum variază poziţia imaginii şi care e natura ei (reală sau virtuală), ca şi faptul dacă este sau nu, se vede din graficul funcţiei.

$$x_2 = \frac{Rx_1}{2x_1 - R} = \frac{R}{2 - \frac{R}{x_1}}$$

Scanned with CamScanner

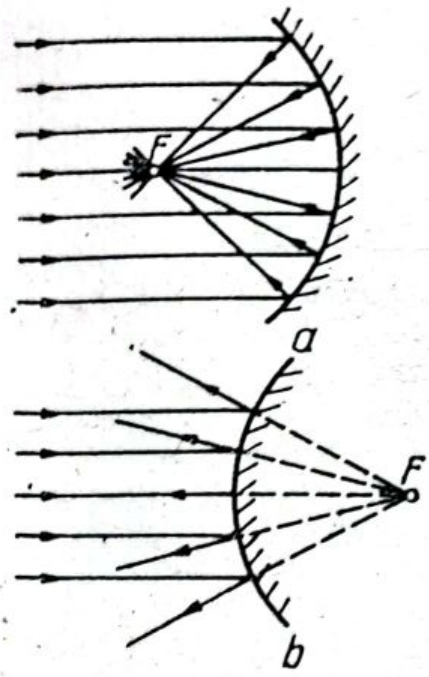


Fig. 4.26

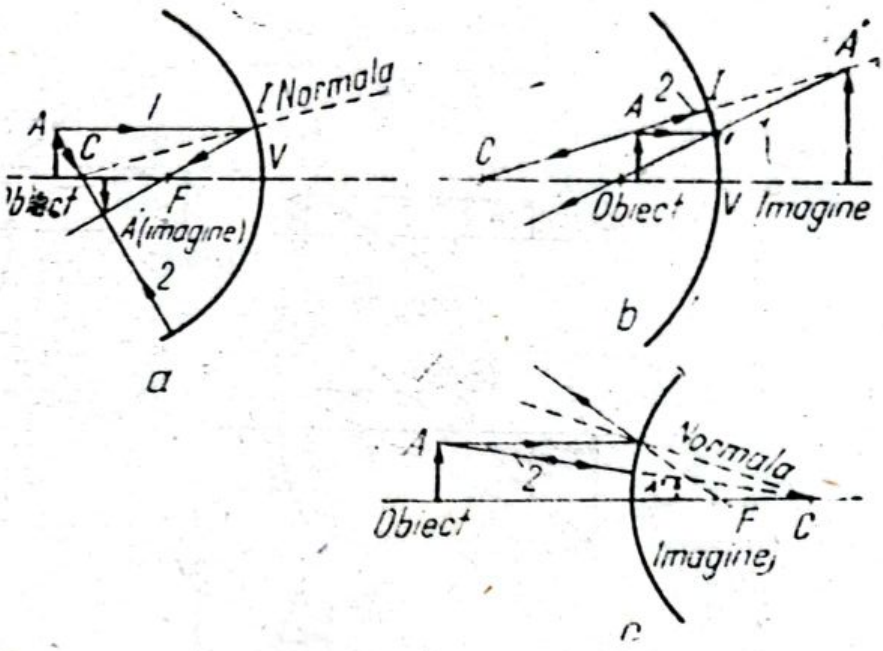


Fig. 4.27

obținută prin transformarea relației punctelor conjugate,

și din analiza semnului măririi $\beta = -\frac{x_2}{x_1}$.

Construcțiile corespunzătoare cîtorva cazuri se găsesc în fig. 4.28.

2. Lentile subțiri. Lentila este un mediu transparent (A) separat de mediul exterior (B) prin doi dioptri D_1 și D_2 (fig. 4.29). Linia C_1C_2 a centrelor de curbură ale celor doi dioptri este *axa optică principală*. Dacă V_1V_2 este neglijabil în raport cu razele R_1 și R_2, lentila este subțire (V_1 se confundă cu V_2 în punctul V); centrul lentilei V este *centrul optic*. Imaginea punctului P s-ar forma în absența dioptrului D_2 în P_1. Atunci P_1 devine *obiect virtual* pentru dioptrul D_2 și imaginea finală se formează în P_2. Poziția x_2 a imaginii, cînd se știu distanța x_1, a obiectului și cei doi indici de refracție n_1 și n_2, este, pentru lentile subțiri;

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (4.31)$$

Scanned with CamScanner

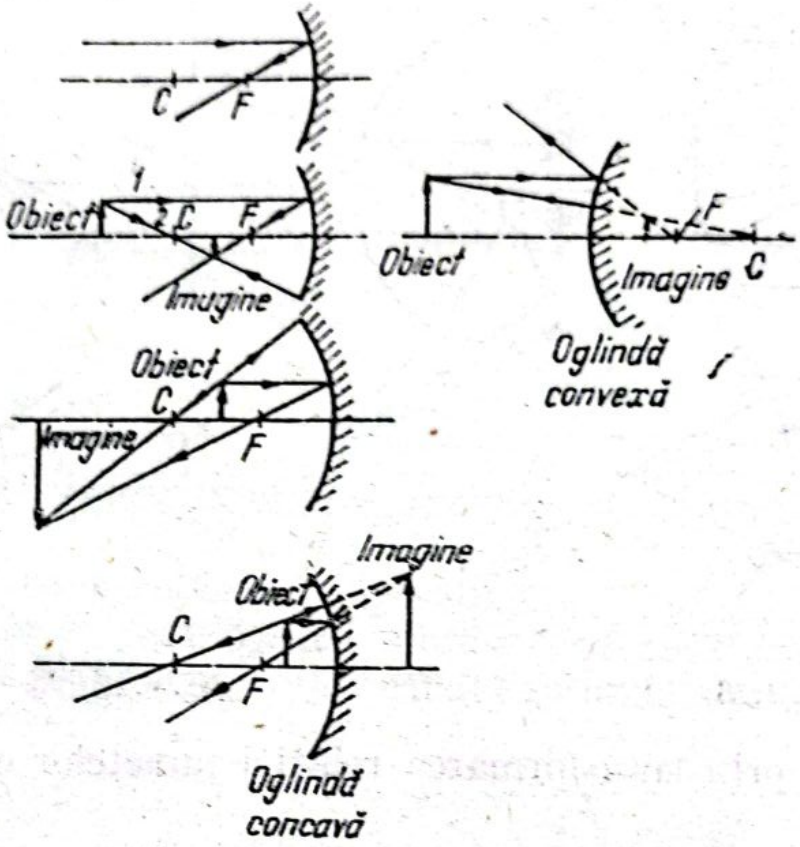


Fig. 4.28

(*formula lentilelor*) unde $n = n_2/n_1$. Toate distanţele se măsoară de la centrul optic, lumina parcurgînd lentila de la stînga la dreapta, distanţele măsurate la stînga cen-

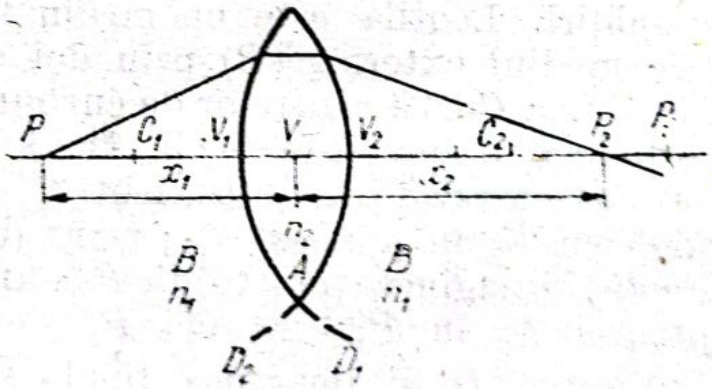


Fig. 4.29

trului optic sînt negative, iar cele măsurate la dreapta sînt pozitive.

Cînd $x_1 \to -\infty$, $x_2 = \dfrac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)} = f_2$;

(4.32)

Scanned with CamScanner

cînd $x_2 \to \infty$, $x_1 = -\dfrac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)} = f_1$.

Distanţele focale fixează *focarele lentilelor*, punctele unde razele convergente (sau prelungirile lor) provenite din cele incidente, paralele cu axa optică, întîlnesc axa. Orice rază trece nedeviată prin centrul optic.

Focarele sînt simetric aşezate. Mărimea $\dfrac{1}{f}$ se numeşte *convergenţă*. Convergenţa se măsoară în **dioptrii** (m^{-1}). Formula lentilelor se mai scrie în funcţie de distanţa focală.

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}. \qquad (4.33)$$

Mărirea liniară este $\beta = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{x_2}{x_1}$. Se observă, pentru figura 4.29, că $\beta < 0$ deoarece în acest caz $x_1 < 0$ şi $x_2 > 0$. De exemplu, în figura 4.29 distanţa de la lentilă la obiectul P, VP este negativă, iar distanţa de la lentilă la imagine VP_2 este pozitivă. Poziţia imaginii se obţine, comparînd distanţa focală şi poziţia obiectului, din funcţia

$$x_2 = \frac{fx_1}{f - x_1}.$$

Lentilele ($n_{lentilă} > n_{mediu}$) sînt de două feluri: a) *convergente* (mai groase la mijloc, fig. 4.30), la care unda plană incidentă este transformată în undă sferică avînd centrul dincolo de lentilă (fig. 4.32, a); b) *divergente* (mai groase la margine, fig. 4.31) la care unda plană

Scanned with CamScanner

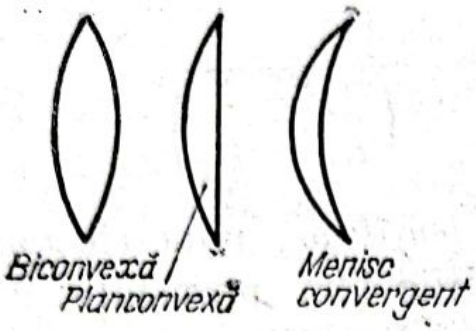


Fig. 4.30

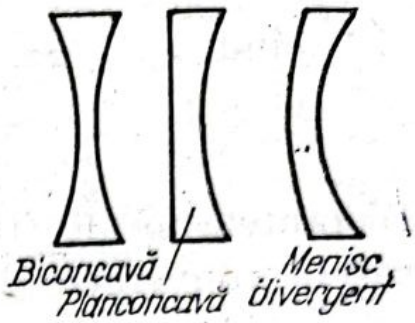


Fig. 4.31

incidentă se transformă în undă sferică dar cu centrul de aceeaşi parte (fig. 4.33, *a*). Figurile 4.32, *b* şi 4.33, *b* indică

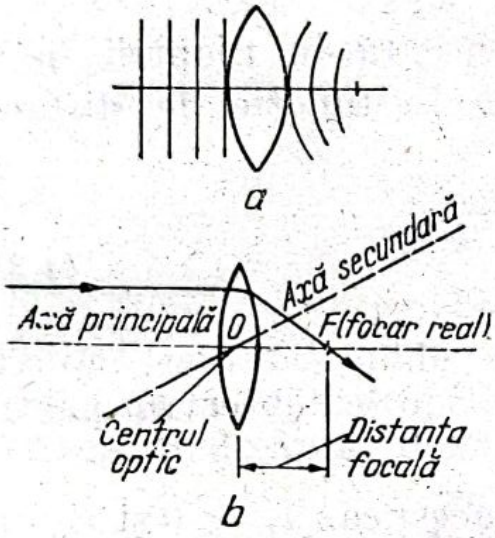


Fig. 4.32

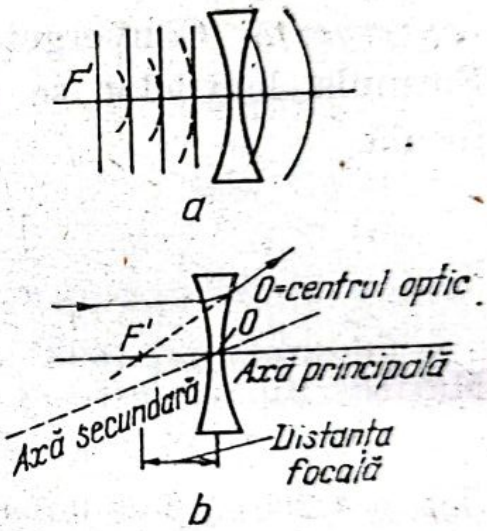


Fig. 4.33

mersul razelor într-o lentilă convergentă, respectiv, divergentă. Imaginea printr-o lentilă se construieşte cu două raze (fig. 4.34).

3. **Asociaţii de lentile (sisteme).** a) *Lentile coaxiale* (*centrate*) aşezate la o distanţă d (fig. 4.35). Imaginea dată de prima lentilă este obiect real sau virtual pentru a doua

$$\frac{1}{d - x'_1} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

unde x_1, x_2, x'_1, x'_2 au semnificaţia din fig. 4.35.

Scanned with CamScanner

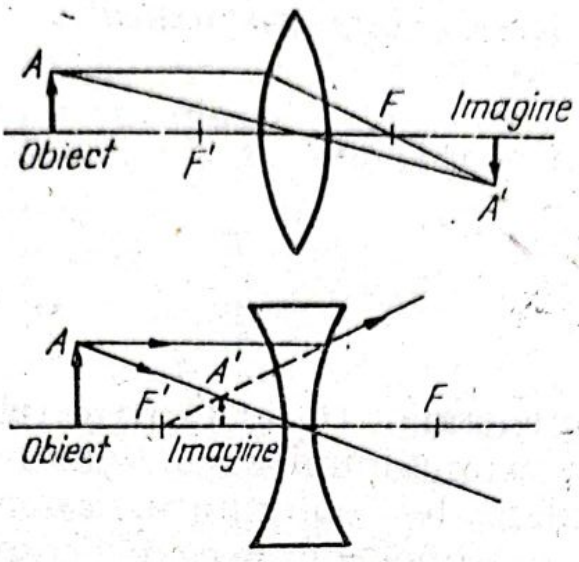


Fig. 4.34

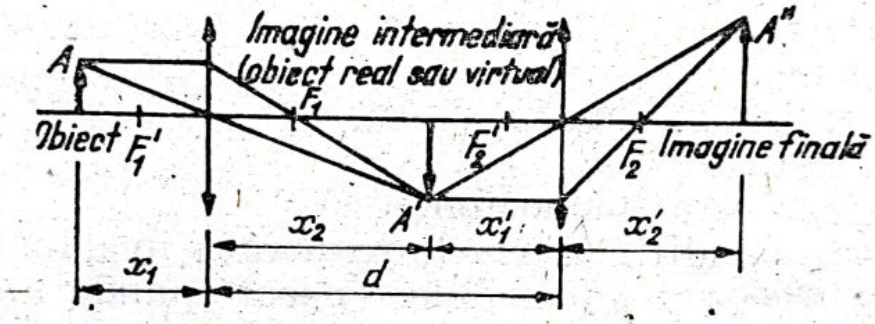


Fig. 4.35

Dacă $f_1 + f_2 = d$ sistemul este *telescopic* sau *afocal*.

Mărirea liniară este $\beta = \frac{y'_2}{y_1}$ adică : $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$

b) *Lentile alipite.* În acest caz, $d = 0$

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

și, deoarece x_1 este acum distanța obiect-sistem, iar x'_2 este distanța sistem-imagine, prin analogie cu relația lentilei subțiri

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} ; \qquad (4.34)$$

Scanned with CamScanner

$\frac{1}{f}$ se numește *convergența sistemului*:

Mărirea este în acest caz

$$\beta = \frac{f_2}{f_1}. \tag{4.35}$$

Observație generală. În utilizarea relațiilor obținute cu convenția de semne numită convenția geometrică sau sistemul cartezian de coordonate, *valorile numerice* se introduc, ținînd seamă de această convenție.

4. **Aberațiile sistemelor optice.** Relațiile referitoare la dioptru și asociațiile de dioptri se demonstrează aplicînd punctul de vedere al opticii geometrice și impunînd anumite restricții;

— fasciculele sînt paraxiale;

— dimensiunile obiectului sînt mici în raport cu distanțele focale;

— lumina este monocromatică.

În aceste condiții sistemele realizează imagini perfect stigmatice (fiecărui punct obiect îi corespunde un punct imagine) și omotetice; toate punctele obiectului aparținînd unui plan perpendicular pe axa optică au corespondente imaginile așezate de asemenea într-un plan perpendicular pe axă. Întrucît realitatea nu ține seamă de condițiile impuse, calitatea imaginilor obținute este, în consecință, imperfectă. Imperfecțiunile se numesc *aberații*.

a) Aberațiile *de sfericitate* se datoresc curburii suprafețelor sistemului și se referă la nerespectarea primelor două condiții.

În demonstrațiile formulelor dioptrului se folosesc aproximații geometrice care sînt valabile numai cu condiția întîi. Astfel, există atît la oglinzi cît și la lentile un segment de focare cu un capăt care este focarul razelor marginale și cu celălalt capăt focarul razelor paraxiale. Lungimea segmentului astfel format este *aberația principală longitudinală* (λ). Pe un plan așezat în acest ultim focar un fascicul paralel avînd lărgimea lentilei apare ca o pată

Scanned with CamScanner

circulară a cărei rază este *aberaţia principală transversală* (τ). λ este direct proporţional cu pătratul unghiului de incidenţă (i) al razei cu suprafaţa oglinzii sau a lentilei, iar τ este direct proporţional cu puterea a treia a lui i. La oglindă se corectează aberaţiile utilizînd oglinzi parabolice; la lentile se diafragmează sistemul şi se alătură o lentilă divergentă la care aberaţia de sfericitate este inversă.

b) Aberaţiile *cromatice* provin de la dependenţa indicelui de refracţie de frecvenţa radiaţiei (formula (4.25)). Relaţiile (4.32) arată că există un focar pentru fiecare radiaţie monocromatică. Apare o pată albicioasă cu marginile colorate de la roşu la violet. Corectarea se face prin alipirea unor lentile convergente şi divergente cu indici de refracţie diferiţi (acromatizare).

Difracţia luminii pe diafragme împiedică realizarea unui sistem optic perfect, *corectat.*

5. **Instrumente optice.** Instrumentul optic este format dintr-un sistem de oglinzi şi lentile destinat obţinerii imaginii unui obiect. Sistemul este *centrat* adică axele optice ale dioptrilor coincid.

Clasificare după criteriul naturii imaginilor:

a) *Cu imagine reală* (*obiective*)

Ochiul (fig. 4.36, *a*). Există trei medii optice: *umoarea apoasă* $u_a (n = 1{,}34)$, *cristalinul* $c (n = 1{,}38 \div 1{,}41)$, *umoarea sticloasă* $u_s (n = 1{,}34)$ toate formînd trei sisteme centrate. Imaginea, reală şi inversată, se formează mereu pe *retină* printr-un sistem automat de acomodare (cristalinul îşi modifică curbura). Acomodarea se face între două poziţii limită: *punctum proximum* (cel mai apropiat) şi *punctum remotum* (cel mai depărtat; la infinit pentru ochiul normal). *Distanţa optimă de vedere distinctă este*, la adult, de 25 cm pentru ochiul normal. Diafragma este *irisul* care deschide reflex pupila în funcţie de luminozitate.

Ochiul redus este un dioptru sferic care modelează funcţia optică a ochiului ca sistem optic (fig. 4.36, *a* jos).

Miopia şi hipermetropia sînt anomalii anatomice (fig. 4.36, b).

Scanned with CamScanner

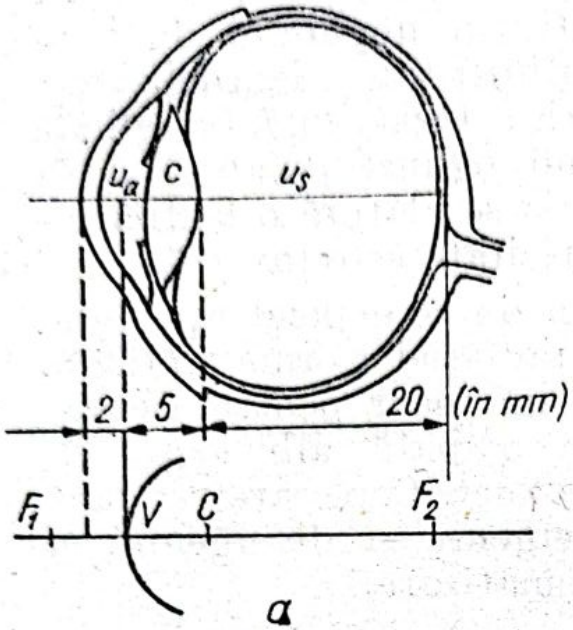


Fig. 4.36 a

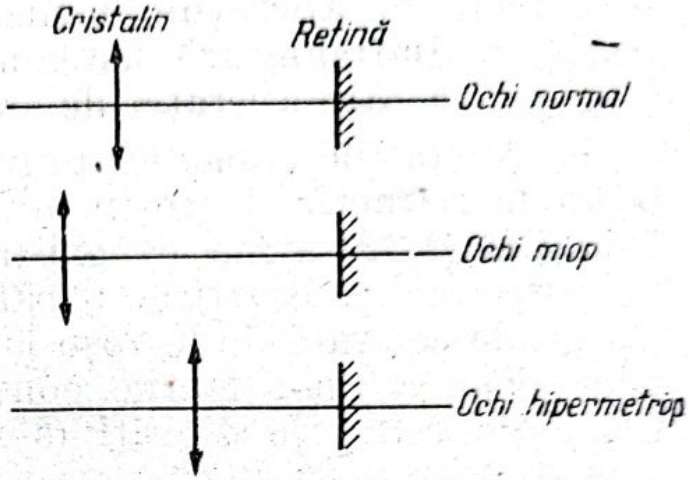


Fig. 4.36 b

Defectele de *miopie* şi *hipermetropie* ale ochiului se pot corecta cu lentile adecvate: divergente (miop), convergete (hipermetrop). Cînd capacitatea de acomodare scade, la bătrîneţe, *ochiul presbit* vede bine la distanţă; pentru apropiere se folosesc ochelari convergenţi.

Vederea binoculară. Fixarea binoculară a unui punct implică o convergenţă a axelor în acel punct. Alte puncte se văd dublu, ceea ce se elimină din imagine prin concentrarea atenţiei asupra primului. Senzaţia de relief provine din unirea în centrii scoarţei cerebrale a perspectivelor diferite ale celor doi ochi. Aceasta, împreună cu experienţa anterioară, contribuie şi la aprecierea distanţei.

Imaginea luminoasă pe retină are o anumită persistenţă (10^{-1}s). Imaginile sosite la intervale mai mici produc impresia de continuitate (fenomen folosit la percepţia cinematografică şi televiziune). Orice nuanţă de culoare poate fi obţinută din trei componente: roşu, verde, albastru (*radiaţii primare*). Orice pigment de o anumită culoare are proprietatea de a extrage din radiaţia incidentă numai o anumită componentă (*filtru*).

Aparatul fotografic. Imaginea de pe film se formează cu ajutorul obiectivului şi este reală, inversată şi mai

Scanned with CamScanner

mică decît obiectul. *Obiectivul* este un sistem optic convergent corectat de aberaţii şi diafragmat. Diafragma reglează fluxul luminos; distanţa obiectiv-film poate fi modificată (*punere la punct*) pentru a se obţine o imagine clară cu ajutorul unui mecanism. Orice obiectiv are notată vizibil pe montură deschiderea relativă, egală cu raportul dintre deschiderea utilă a obiectivului (diametrul diafragmei la deschidere maximă) şi distanţa focală,

Aparatul de proiecţie. Instrumentul dă o imagine reală mărită a unui obiect luminos sau luminat. Obiectul poate fi transparent (*proiecţie dia*) sau opac (proiecţie *epi*). Obiectivul aparatului de proiecţie este asemănător cu obiectivul aparatului fotografic. *Condensatorul* care este un sistem optic montat între sursă şi dispozitiv, are rolul de a repartiza uniform şi de a capta cît mai mult fluxul de lumină divergent emis de sursă concentrînd fasciculul de lumină asupra obiectului care este proiectat. Lentilele sistemului condensor au distanţa focală foarte mică şi condensatorul este plasat în apropierea obiectului.

b) *Cu imagine virtuală* (*oculare*).

Lupa. Formarea imaginii este dată în fig. 4.37.

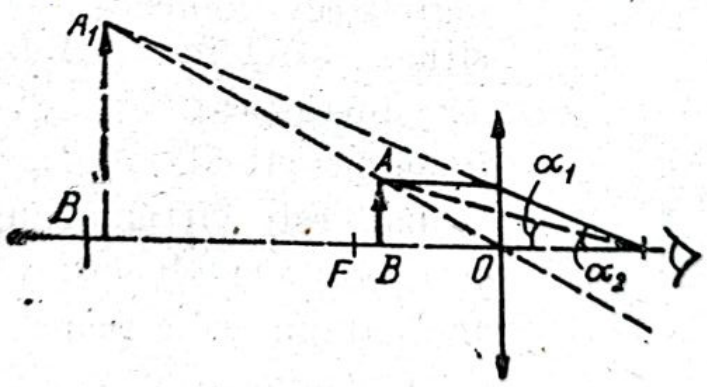


Fig. 4.37

Se observă că lupa măreşte puterea separatoare întrucît distanţa dintre două puncte este amplificată ($\|A_1B_1\| > \|AB\|$). Puterea P a lupei este egală cu convergenţa ei

$$P = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{AB} \approx \frac{1}{f}. \qquad (4.36)$$

Scanned with CamScanner

unde α_2 este unghiul sub care se vede obiectul cu lupa (diametrul aparent), iar f, distanța focală a lentilei sau a sistemului convergent (corectat de aberații) care sînt folosite ca lupe. Relația puterii este valabilă pentru OB ≈ OF $= f$, caz cel mai favorabil, ochiul trebuind să vadă imaginea fără acomodare ($OB_1 \approx \infty$). $[P]_{SI}$ = dioptrie

Grosismentul lupei este

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \delta P \qquad (4.36')$$

unde δ este distanța minimă de vedere clară ($\delta \approx 0{,}25$ m, pentru un ochi normal).

Microscopul. Obiectivul *Ob* dă imagine reală, ocularul *Oc*, imagine virtuală (fig. 4.38); ambele sînt de fapt sisteme convergente corectate de aberații. Prin deplasarea tubului microscopului (punerea la punct) obiectul așezat pe măsuța microscopului, este adus cu puțin dincolo de focarul obiectivului, F_{ob}. Obiectul are imaginea reală A_1B_1 inversată și mai mare decît obiectul. Ocularul este situat astfel încît A_1B_1 să se plaseze între focar (F_{oc}) și ocular (*Oc*). Imaginea finală A_2B_2, care se formează, este virtuală, mult mărită, în raport cu obiectul. Acesta este luminat puternic pentru a se obține o imagine ușor vizibilă.

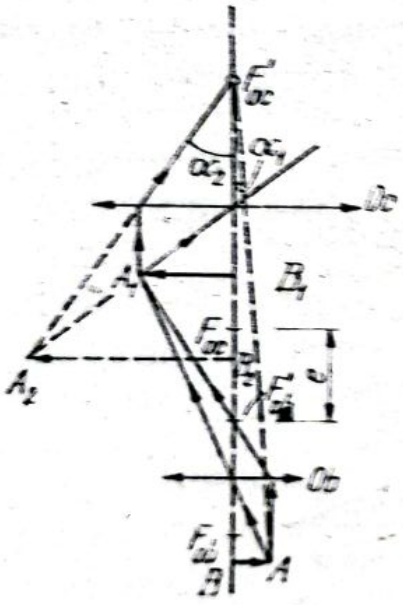


Fig. 4.38

Puterea este

$$P = \frac{e}{f_1 f_2}. \qquad (4.37)$$

În general, prin montaj, e este constant. Puterea poate fi modificată prin combinarea în mod convenabil a diferitelor oculare și obiective care există în cutia microscopului.

Scanned with CamScanner

Grosismentul este raportul dintre diametrul aparent al imaginii finale și al obiectului

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = P\delta \qquad (4.38)$$

unde δ este distanța minimă de vedere distinctă, iar P este puterea microscopului scrisă mai sus.

Un microscop este caracterizat prin *puterea separatoare*, cea mai mică distanță dintre două puncte ale obiectului care mai pot fi distinse cu instrumentul optic. Mărirea puterii separatoare este limitată de fenomenul de difracție (este mai mică de 0,25 μm pentru radiația în vizibil și 0,15 μm pentru ultraviolet, cu înregistrare pe film). Punctul imagine este însoțit de inele alternativ luminoase și întunecoase. O mărire în continuare a puterii separatoare se obține cu fascicule de electroni a căror undă asociată are o lungime de undă mult mai mică. Cel mai mic unghi sub care încă se mai văd distinct două puncte fiind ε, se arată că

$$\varepsilon = \frac{0{,}61\ \lambda}{h} \qquad (4.39)$$

unde h este raza deschiderii fasciculului luminos (raza diafragmei sau a monturei obiectivului).

Puterea de separație a instrumentului optic egală cu inversul lui ε depinde de lungimea de undă a radiației cu care se lucrează, λ.

Se observă că pentru mărirea puterii separatoare este necesar să se micșoreze λ, ceea ce se relizează cu *microscopul electronic* unde unda asociată fasciculului electronic are ordinul de mărime -10.

Luneta. Instrument destinat observării obiectelor foarte îndepărtate : obiectivul (*Ob*) și ocularul (*Oc*) sînt sisteme convergente corectate, cu deschidere mare și distanță focală mare, respectiv deschidere mică și distanță focală mică. Formarea imaginii este dată în fig. 4.39. Notîndu-se cu α_1 unghiul sub care se vede obiectul fără instrument și care e același din orice punct al axei optice, deoarece obiectul este foarte depărtat, grosismentul este

Scanned with CamScanner

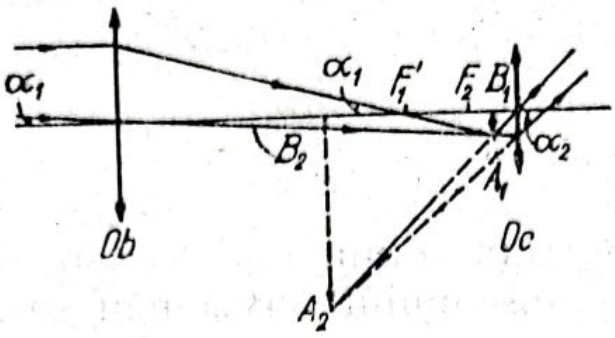


Fig. 4.39

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} \quad (4.40)$$

Imaginea dată este inversată, fapt fără importanţă pentru observarea corpurilor cereşti (*luneta astronomică*). Răsturnarea imaginii se face cu o lentilă convergentă plasată între obiectiv şi ocular, sau plasată între obiectiv şi A_1B_1, care devine obiect virtual, sau se înlocuieşte ocularul convergent cu un sistem divergent (*luneta astronomică*).

Telescopul lui Newton. Calitatea optică a unei lunete creşte cînd diametrul obiectivului creşte. Deoarece acest lucru nu se poate face practic decît pînă la o anumită valoare, obiectivul lunetei este înlocuit cu o oglindă. Avantaje : se înlătură aberaţia cromatică, se măreşte deschiderea (fig. 4.40).

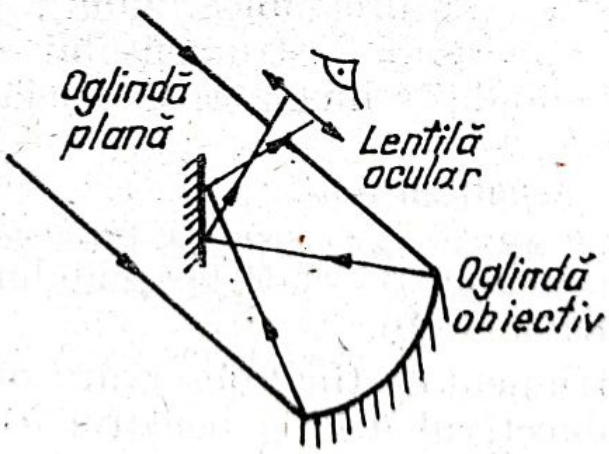


Fig. 4.40

Un instrument optic modern conţine un mare număr de dioptri centraţi pentru a se putea compensa parţial operaţiile gaometrice şi cromatice peatru razele neparaxiale imposibile de înlăturat.

Scanned with CamScanner

4.9, Interferența luminii

Deoarece senzația de lumină se datorează exclusiv componentei electrice a undei electromagnetice, în studiul interferenței și difracției luminii se exprimă numai oscilația și unda determinate de variația intensității cîmpului electric.

1. **Coerență.** Două surse luminoase emit două unde de aceeași frecvență cu amplitudinile E_{1max} și E_{2max} Într-un punct se vor compune oscilațiile :

$$E_1 = E_{1max} \sin(\omega t - kd_1) \quad \text{și}$$
$$E_2 = E_{2max} \sin(\omega t - kd_2 + \varphi_0)$$

unde : $\omega = 2\pi\upsilon$, φ_0 este diferență de fază și $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ este *numărul de undă*. Se obține o nouă oscilație : $E = E_1 + E_2$ de amplitudine dată de relația

$$E_{max}^2 = E_{1max}^2 + E_{2max}^2 + 2E_{1max} E_{2max} \cdot$$
$$\cdot \cos\left(\frac{2\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} + \varphi_0\right);$$

$d_2 - d_1$ se numește *diferență de drum*. Aceasta se înlocuiește, cînd mediul de propagare are un indice de refracție n, cu diferența de drum optic $n(d_2 - d_1)$.

În locul de suprapunere intensitatea luminoasă este proporțională cu pătratul amplitudinii cîmpului electric $E : I \sim E_m^{2ax}$. Ochiul reține numai media în timp a intensității rezultate. Dacă $\varphi_0 = 0$ diferența de fază provine numai din diferența de drum și se pot întîmpla două cazuri :

— diferența de fază este variabilă haotic ; sursele sînt *necoerente*. Nu are loc interferența ;

— diferența de fază este constantă ; sursele sînt *coerente*, se produce *interferență* (fenomenul de compunere a două unde luminoase provenite de la surse coerente).

Scanned with CamScanner

În punctul considerat pot exista două situaţii importante

a) $\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 2k\pi$ sau $d_2 - d_1 = k\lambda$ şi

$$I \sim (E_{1max} + E_{2max})^2$$

b) $\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = (2k + 1)\,\pi$

sau

$$d_2 - d_1 = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}$$

şi

$$I \sim (E_{1max} - E_{2max})^2.$$

Dacă $E_{1max} = E_{2max}$, în primul caz intensitatea luminoasă este maximă (lumină), în al doilea, intensitatea este nulă (întuneric). Se obţin franje de interferenţe.

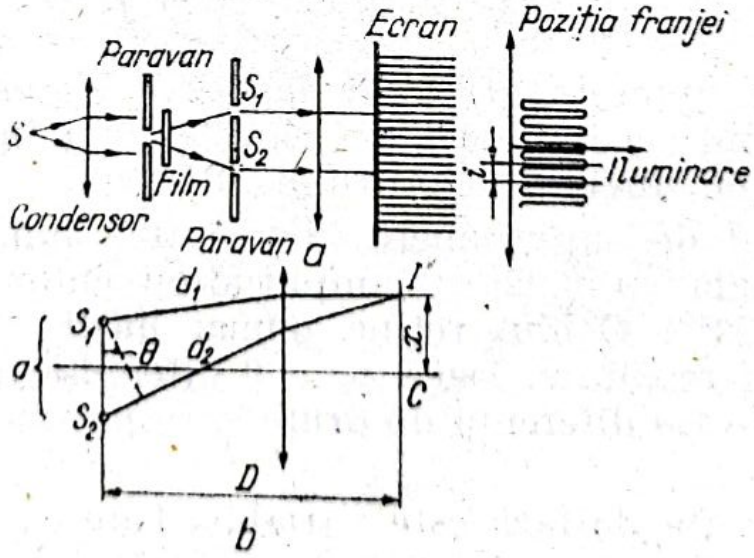


Fig. 4.41

Interferenţa se poate realiza atît în lumină monocromatică cît şi în lumină albă. În lumină monocromatică

se pot obține franje de interferență cu ajutorul unei lame cu fețe plane și paralele.

2. **Interferența în lumină monocromatică.** Dispozitivul Young realizează surse coerente (fig. 4.41 a).

Construcția din fig. 4.41, b este valabilă pentru orice perturbație plecată de la oricare oscilator elementar al sursei S, care nu este coerentă. S_1 și S_2 sînt însă coerente. Diferența de drum este (fig. 4.41, b)

$$d_2 - d_1 = ax/D.$$

Pentru franje luminoase $\frac{ax}{D} = k\lambda$, pentru cele întunecoase $\frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$. Interfranja (i) se calculează din

$$i = \frac{\lambda D}{a},$$

putîndu-se calcula λ dacă se măsoară i.

Unde coerente se mai pot crea prin :

a. *lame cu fețe plane și paralele.* (fig. 4.42). Razele *1'* și *1''* provin din aceeași rază. Parcursul diferit introduce o anumită diferență de drum (de fază). *1'* și *1''* interferă la infinit, eventual în planul focal al unei lentile convergente. Diferența de drum este

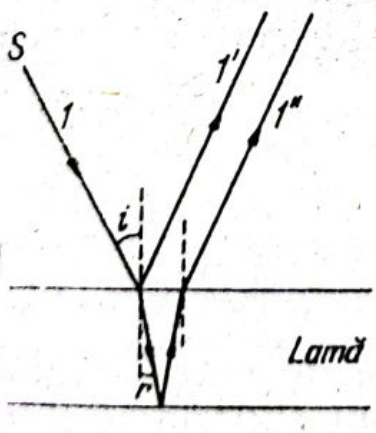


Fig. 4.42

$$\delta = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}$$

(n, indicele de refracție ; e, grosimea lamei ; λ, lungimea de undă a radiației incidente). Dacă lama are riguros aceeași grosime suprafața ei va apare (în lumină monocromatică) uniform luminată (dacă $\delta = k\lambda$). Defectele de paralelism

Scanned with CamScanner

se vor detecta prin apariţia franjelor de-a lungul unor curbe care vor fi locul geometric al punctelor în care lama are aceeaşi grosime (franje de egală grosime).

b. *pană optică* (fig. 4.43) Raza *1* se desparte în două componente *1'* şi *1''* coerente. Parcursul diferit introduce o diferenţă de fază datorită diferenţelor de drum. Franjele sînt localizate în planul *P* care trece prin muchia diedrului.

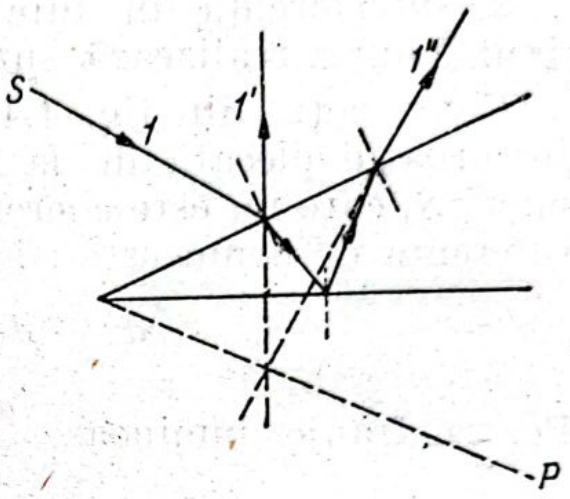


Fig. 4.43

3. Deplasarea franjelor. Traversarea unei lame de grosime l şi indice absolut n de către un fascicul care interferează cu altul determină deplasarea franjelor în bloc cu

$$x = l(n - 1)\frac{D}{a}$$

faţă de interferenţa în absenţa lamei. Măsurările de acest fel sînt utilizate pentru determinarea grosimilor extrem de mici, ceea ce a făcut posibilă definirea metrului în SI : lungimea egală cu de 1650763,73 ori lungimea de undă în vid a radiaţiei corespunzătoare tranziţiei între nivelele $2p_{10}$ şi $5d_5$ ale atomului de kripton.

4.10. Difracţia luminii

Difracţia este fenomenul de ocolire de către lumină a obstacolelor, cînd dimensiunile acestora sînt de ordinul de mărime al lungimii de undă a radiaţiei.

Radiaţia monocromatică incidentă pe o reţea formată din linii fine trasate pe o suprafaţă (*reţea de difracţie*) formează în fantele reţelei noi centre de vibraţie de la care se propagă unde sferice în toate direcţiile. Centrele de vibraţie emit unde coerente, care interferează formînd

Scanned with CamScanner

franje pe un ecran (fig. 4.44). Se produce o interferență de mai multe fascicule, atîtea cîte fante sînt în rețea.

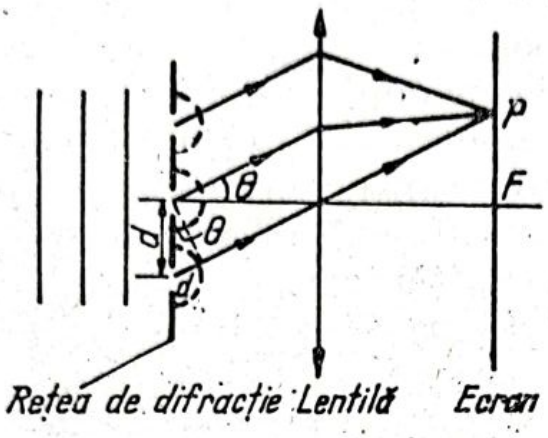


Fig. 4.44

Dacă două fascicule provenite de la două fante vecine, sub un anumit unghi, au între ele o diferență de fază corespunzătoare unui maxim, atunci toate fasciculele de la rețea avînd același unghi interferă într-un punct dînd maxim. Pentru aceasta diferența de drum trebuie să fie un multiplu al lungimii de undă

$$\delta = k\lambda = d \sin \Theta.$$

Pentru minime e necesar ca

$$\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} = d \sin \Theta;$$

k se numește *număr de ordine*. Utilizînd spectroscopul cu rețea de difracție se poate analiza lungimea de undă a luminii emisă de o sursă.

Experimental, cu ajutorul rețelei de difracție se poate determina lungimea de undă λ a radiației incidente normal,

$$\lambda = \frac{x}{k f n}, \qquad (4.44)$$

unde x, k, f, și n sînt, respectiv : distanța FP (fig. 4.44), ordinul maximului corespunzător punctuiui P, distanța focală a lentilei și numărul de fante pe unitatea de lungime a rețelei.

4.11. Difracția razelor X

Electronii, accelerați, în tubul electronic vidat, la diferențe de potențial mari, lovesc ținta (*anticatod*) și

Scanned with CamScanner

produc radiaţie X, radiaţie electromagnetică cu lungimea de undă de ordinul angströmului. Radiaţia X se datoreşte tranziţiei electronilor de pe păturile interioare ale atomului. Fiecare element poate emite pe lîngă spectrul său optic şi un spectru caracteristic în domeniul radiaţiei X. Există şi o radiaţie de frînare. Pentru a produce difracţia radiaţici X este necesară o reţea cu constanta de ordinul de mărime al lungimii de undă. Se utilizează un cristal a cărui reţea de atomi îndeplineşte condiţia cerută. Figura de difracţie obţinută pe film (fig. 4.45, a) dă informaţii despre structura internă a cristalului.

Legea lui Bragg dă condiţia pentru ca să fie posibilă difracţia razelor X pe cristal. A, B, ... fiind centre elementare de difracţie (fig. 4.45, b), sînt atinse de radiaţia incidentă făcînd un unghi θ cu familia de plane care conţin centrele elementare. Razele difractate pe o direcţie oarecare vor produce interferenţa în puncte de maximă intensitate dacă diferenţa de drum între undele adiacente îndeplineşte condiţia lui Bragg

$$2d \sin \theta = k\lambda. \qquad (4.42)$$

Din spectrul razelor X incidente sub un anumit unghi θ se difractă numai acelea a căror lungime de undă satisface relaţia precedentă. Dacă λ este cunoscută poate fi determinat d.

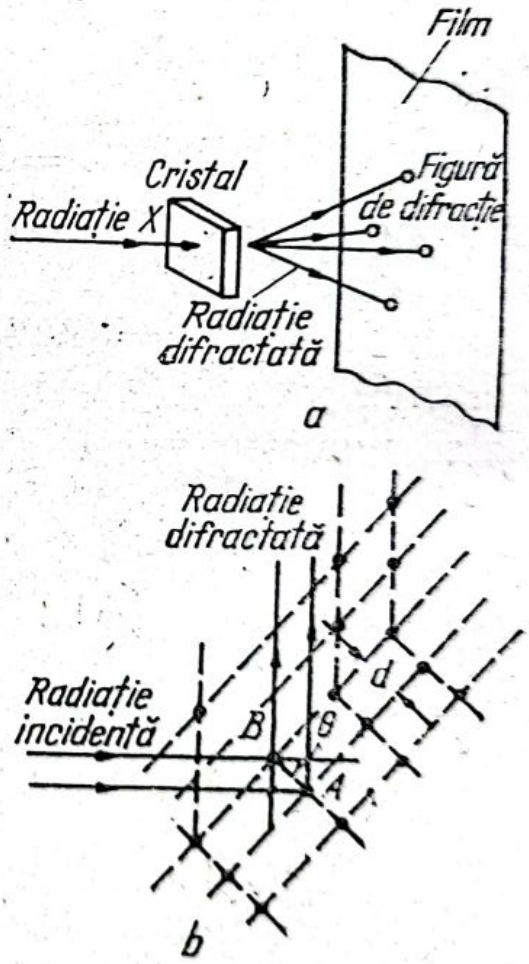


Fig. 4.45

4.12. Polarizarea luminii

Unda electromagnetică este o undă transversală, dar spre deosebire de unda care se propagă de la un dipol în

Scanned with CamScanner

care vectorul $\vec{E}$ vibrează într-un plan oarecare — *undă plan polarizată* (fig. 4.46, a), lumina provenită de la o sursă oarecare este emisă de diferiți emițători elementari (atomi și molecule) care trimit trenuri de undă ale căror plane de vibrație sînt orientate neprivilegiat — *undă nepolarizată* (fig. 4.46, b).

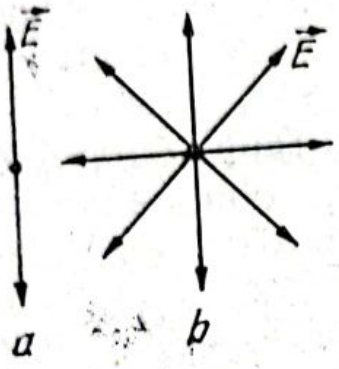


Fig. 4.46

Dacă una dintre direcțiile de vibrație este predominantă din punctul de vedere al amplitudinii, lumina se numește *parțial polarizată.*

Trecînd printr-un *polarizor* lumina nepolarizată se polarizează (fig. 4.47, a) componentele perpendiculare pe planul de polarizare fiind eliminate (fig. 4.47, b). Un nou

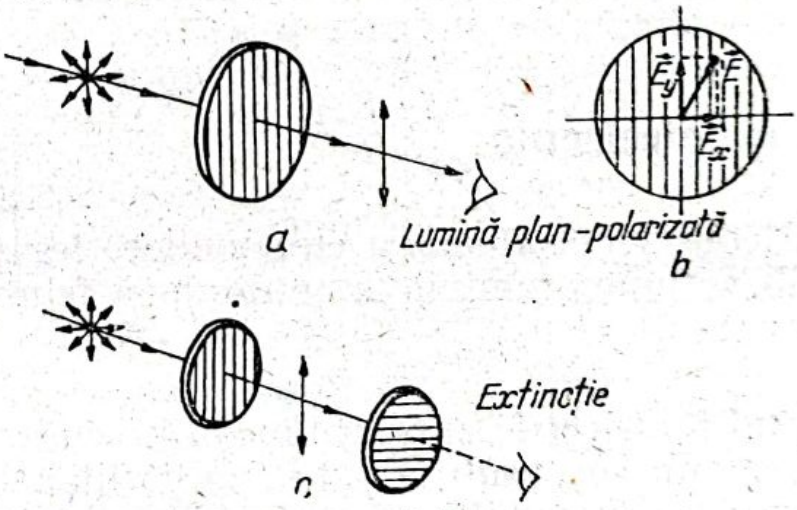


Fig. 4.47

polarizor, numit *analizor*, poate produce extincția razei polarizate (fig. 4.47, c) dacă se așază la 90° față de primul.

Polarizarea se poate produce și prin reflexie sau refracție.

La suprafața de separație se produce atît o reflexie, cît și o refracție. Cele două raze sînt polarizate ca în fig. 4.47. Cea reflectată, perpendicular pe planul incidenței, iar cea refractată, în planul de incidență.

Pentru diferite unghiuri raza reflectată este parțial polarizată. Există un unghi pentru care polarizarea prin reflexie este totală (unghiul de incidență brewsteriană)

$$\operatorname{tg} i_B = n. \tag{4.43}$$

Scanned with CamScanner

Relaţia este utilizată la determinarea lui n pentru corpuri opace.

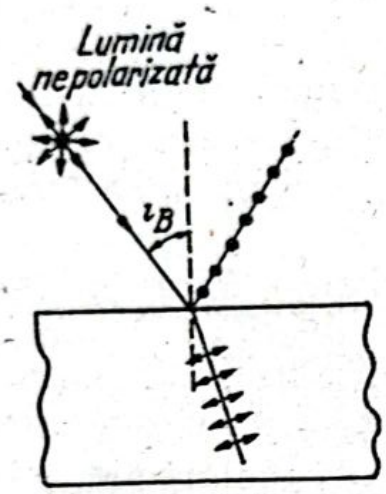


Fig. 4.48

Suprapunînd mai multe plăci se poate face ca raza emergentă să fie aproape complet polarizată.

La anumite substanţe (spatul de Islanda) se observă două raze refractate: una care are o direcţie respectînd legea refracţiei, cealaltă nu. Razele, analizate cu *lame polarizate* se dovedesc polarizate în plane perpendiculare. Cele două raze nu interferă, ceea ce dovedeşte că interferenţa se produce numai între razele coerente care sînt polarizate în acelaşi plan.

4.13. Efectul fotoelectric

Efectul constă în eliberarea electronilor, legaţi într-un sistem, sub acţiunea luminii. Este de două feluri: 1) extern, 2) intern.

1. **Efectul fotoelectric extern.** Constă în emiterea electronilor dintr-un corp sub acţiunea radiaţiilor luminoase de frecvenţă convenabilă. Fotoelectronii emişi de un catod iradiat se deplasează spre anodul tubului sub acţiunea cîmpului electric. Se stabileşte astfel un curent electric (*curent fotoelectric*).

Legile fenomenului fotoelectric extern: a) Intensitatea curentului de saturaţie (numărul electronilor emişi într-o secundă) este direct proporţională cu fluxul de energie radiantă incident pe catod.

b) La o frecvenţă dată υ a radiaţiei incidente viteza maximă v_m a fotoelectronilor este dată de relaţia lui Einstein

$$h\upsilon = h\upsilon_0 + \frac{1}{2} m v_m^2 \qquad (4.44)$$

Scanned with CamScanner

unde υ_0 este frecvenţa de prag, m masa electronului, iar h este constanta lui Planck. Energia cinetică nu depinde deci de flux şi efectul poate apare numai de la o frecvenţă superioară frecvenţei de prag.

Explicarea fenomenului se face pe baza ipotezei lui Einstein : energia fotonului radiaţiei incidente $h\upsilon$ trebuie să fie mai mare sau cel puţin egală cu energia de extracţie $h\upsilon_0$ pentru ca fiecare foton să extragă un electron (motiv pentru care este numită frecvenţa de prag). Numărul fotoelectronilor extraşi într-o secundă este cu atît mai mare cu cît numărul fotonilor capabili să efectueze lucrul de extracţie $h\upsilon_0$ este mai mare, adică fluxul de energie radiantă e mai mare.

Pentru un metal energia minimă $h\upsilon_0$ (de extracţie) este egală cu diferenţa energetică dintre nivelul energetic al electronului în afara metalului şi nivelul energetic ocupat cel mai înalt din zona de conducţie energetică din interiorul metalului (nivelul Fermi). Condiţia conduce direct la (4.44) (fig. 4.49 a).

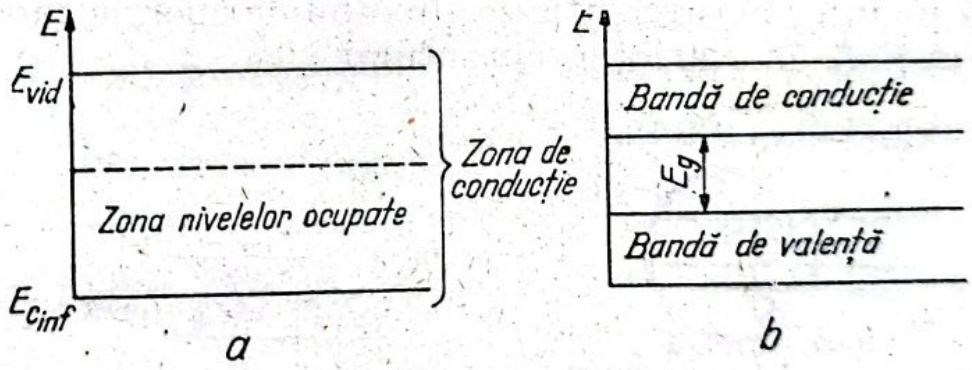


Fig. 4.49

Pentru semiconductor şi izolator primirea unei energii E_g egală cu diferenţa energetică între nivelul inferior al benzii de conducţie şi cel superior al benzii de valenţă duce la tranziţia electronului din banda de valenţă în cea de conducţie ($E_g > 3$eV la izolatori, iar la semiconductori $E_g < 3$ eυ) (fig. 4.49, b).

2. **Efectul fotoelectric intern** (efect fotoconductiv) constă în creşterea conductivităţii electrice a unui material (*fotoconductor*) sub acţiunea radiaţiei luminoase. Se caracterizează prin diferenţa $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$ dintre

Scanned with CamScanner

conductivitatea corpului cînd este și, respectiv, cînd nu este iradiat.

3. **Aplicații. Celula fotoelectrică** (fotocelula). Element de circuit bazat pe fenomenul fotoelectric: a) extern (*celula fotoemisivă*) b) intern (*celula fotoconductivă*)

a) *Celula fotoemisivă.* Catodul fotoemisiv este sensibilizat pentru frecvența radiației care se utilizează. Construcția și montajul se văd în fig. 4.50 a. Pentru amplificare se folosește fotomultiplicatorul în care numărul fotoelectronilor emiși de catod este amplificat pe dinodele D_1, D_2... (fig. 4.50 b). Se construiesc și celule fotoemisive cu vid sau cu gaz. Construcția este principial (fig. 4.50, a) aceeași. Cea din urmă dă un *curent de saturație* de zeci de ori mai mare datorită formării unor purtători de sarcină suplimentară prin ciocnirile electronilor cu atomii gazului (se formează ioni).

Celulele fotoemisive constituie elementele de circuit de bază pentru *releele fotoelectrice* sau pentru înregistrarea sonoră pe film, în care variația fluxului de energie radiantă este tradusă în variația curentului.

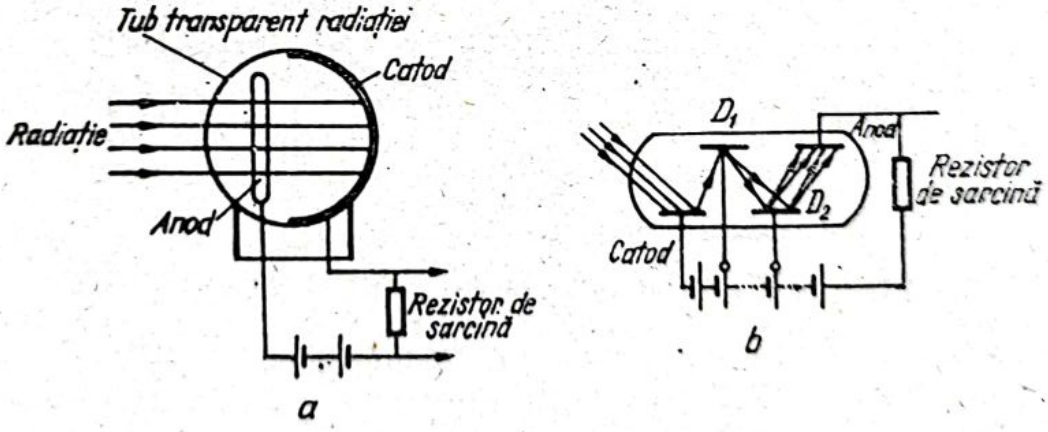


Fig. 4.50

b) *Celula fotoconductivă.* Se utilizează semiconductori care sînt depuși în straturi subțiri pe suporturi izolante (fig. 4.51). Lumina trece prin pelicula metalică, excită electronii din banda de valență în banda de conducție a oxidului cupros. Electronii trec în cupru datorită conducției unilaterale a stratului de baraj. Celula este un convertizor de energie.

Scanned with CamScanner

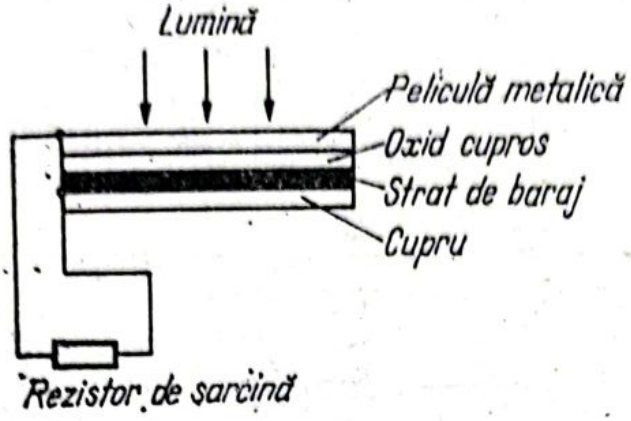


Fig. 4.51

4.14. Efectul Com

Efectul constă în scăderea frecvenţei unei radiaţii X prin difuzarea ei de către corpuri. Radiaţia X de frecvenţă υ este trimisă printr-un sistem de fante pe corpul C (fig. 4.52, a) care o împrăştie. Din radiaţia difuzată se separă

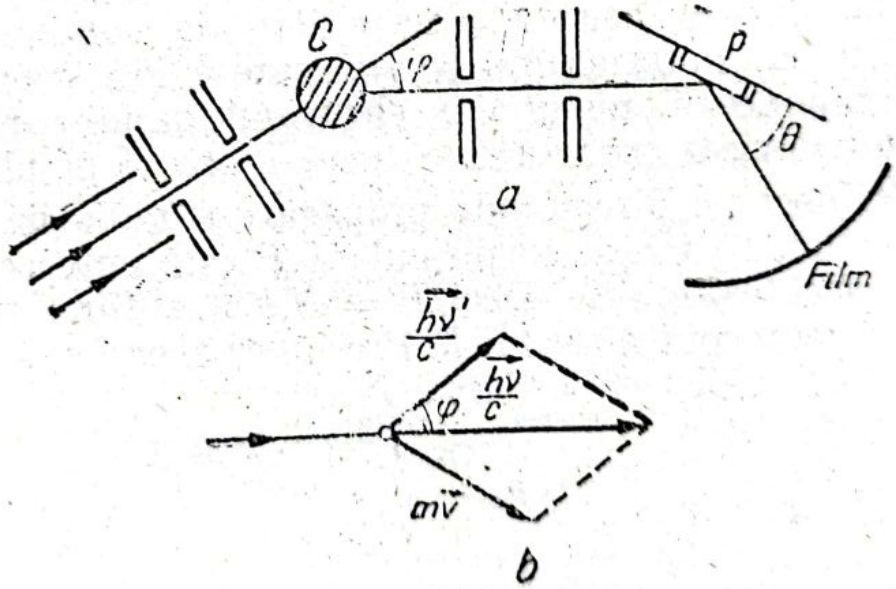


Fig. 4.52

cu un şir de fante un fascicul care face un unghi φ cu fasciculul incident. Fasciculul este trimis într-un spectrograf P. Se constată pe lîngă radiaţia transmisă direct prezenţa unei a doua radiaţii de frecvenţă υ' ($\upsilon'(\varphi) < \upsilon$). *Explicarea efectului se face pe baza teoriei corpusculare.*

Fotonul de energie $h\upsilon$ cu masa $m_1 = \dfrac{h\upsilon}{c^2}$ şi impulsul

$m_f c = h\upsilon/c$, ciocnește un electron cu masa de repaus m_0. Aplicîndu-se fenomenului de ciocnire între cele două particule legile de conservare ale energiei și impulsului se găsește (fig. 4.52 b), considerînd electronul în repaus,

$$\frac{c}{\upsilon'} - \frac{c}{\upsilon} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi) \qquad (4.45)$$

sau, notînd $\Lambda = \dfrac{h}{m_0 c}$, *lungimea de undă Compton*,

$$\lambda - \lambda' = 2\,\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \qquad (4.45')$$

4.15. Presiunea luminii

Componenta electrică a undei electromagnetice incidente acționează asupra electronilor de conducție din corpul iradiat determinînd o deplasare a lor. Sub influența componentei magnetice electronii în mișcare ordonată sînt deviați creîndu-se o forță normală pe planul lui $\vec{E}$ și $\vec{H}$, deci pe direcția de propagare a radiației (teoria ondulatorie). În teoria corpusculară P este puterea radiației pe unitatea de arie. Deci $P = N\,h\,\upsilon$, N fiind număr ul de fotoni corespunzător lui P. Presiunea exercitată este, pe un perete complet absorbant,

$$p_a = \frac{P}{c},$$

iar pe un perete perfect reflectant,

$$p_r = 2\frac{P}{c} = 2p_a$$

rezultate confirmate de experiențele lui Gerlach.

Scanned with CamScanner

5.
Fizica atomică și nucleară

5.1. Atomul

1. Modelul planetar. Atomul este un sistem electric neutru. Partea centrală, *nucleul*, este electric pozitivă, sarcina fiind egală și de semn contrar cu a învelișului electronic.

Electronii se mișcă în jurul nucleului, în care se concentrează aproape întreaga masă a atomului.

2. Modele de atom hidrogenoid a) *Modelul lui Bohr* este fundamentat pe două postulate (fig. 5.1)

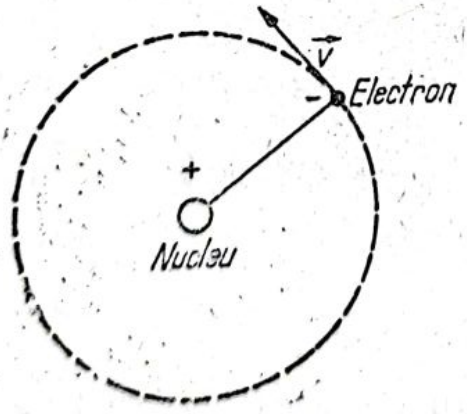


Fig. 5.1.

— electronii se pot mișca în atom numai pe *orbite staționare* caracterizate printr-un nivel energetic determinat. În acest caz mișcarea electronilor se face fără emisie sau absorbție de energie;

— la interacția atomului cu radiația electromagnetică atomul poate absorbi sau emite energie prin trecerea (*tranziția*) unui electron de pe un nivel energetic pe altul, concomitent cu absorbția sau emisia unui foton de energie

$$E_f - E_i = h\nu \qquad (5.1)$$

Scanned with CamScanner

E_i și E_f fiind energia atomului în stare inițială, respectiv finală, h constanta lui Planck, iar ν frecvența radiației electromagnetice absorbite sau emise sub formă de fotoni.

Relația (5.1) sugerează *condiția de cuantificare* impusă momentului cinetic al electronului care se rotește uniform cu viteza v în jurul nucleului, la distanța r

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}, \quad n(1, 2 \ldots \infty) \tag{5.2}$$

m fiind masa electronului. Rezultă că energia (E_n) a stărilor staționare depinde de n, *numărul cuantic principal*

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{me^4}{32\,\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2} \tag{5.3}$$

e fiind sarcina electronului, iar $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Pentru $n = 1$ se obține *energia fundamentală* în *starea fundamentală*. Celelalte stări se numesc *excitate*.

Numărul stărilor staționare este infinit. Stările cu $E < 0$ sînt legate, electronul aparținînd atomului. Pentru $E > 0$ electronul este liber. Energia necesară pentru a scoate un electron din atom de pe starea caracterizată de numărul cuantic n, este

$$E = E_\infty - E_n \tag{5.4}$$

numită energia de ionizare, E_∞ fiind energia limită între starea legată și liberă a electronului. Excitarea și ionizarea atomului se fac prin cedare de energie prin : ciocnire, încălzire, iradiere.

Viteza electronului pe orbită și raza acesteia sînt de asemenea cuantificate

$$v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}, \quad r_n = n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}. \tag{5.5}$$

Cînd electronul face tranziția între stările caracterizate prin numerele cuantice n_i și n_j ($n_i > n_j$) se emite o radiație care are, conform relației (4.26), frecvența

$$\nu_{ij} = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{5.6}$$

Scanned with CamScanner

sau, exprimînd prin numărul de undă $\left(\frac{\nu}{c} = \tilde{\nu}\right)$,

$$\tilde{\nu}_{ij} = \frac{me^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2 c\hbar^3}\left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = R\left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right). \quad (5.7)$$

unde $R = \frac{me^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2 c\hbar^3} = 1{,}097373.\ 10^7 \mathrm{m}^{-1}$ se numește constanta lui Rydberg.

Teoria lui Bohr regăsește spectrul frecvențelor obținute experimental în spectrul de hidrogen (fig. 5.2) putîndu-se calcula constanta lui Rydberg ; nu poate însă explica structura fină a liniilor spectrale observate cu spectroscoape cu putere de rezoluție mare.

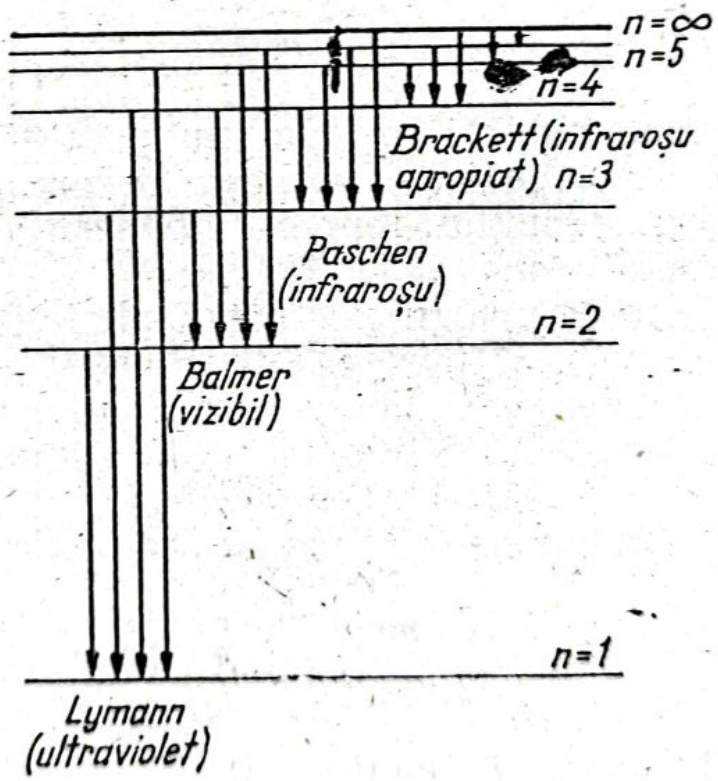


Fig. 5.2.

b) *Modelul cuantic-ondulatoriu.* Din relația de nedeterminare

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (5.9)$$

rezultă că poziția și impulsul unei microparticule nu pot fi determinate cu precizie în același timp, din care cauză noțiunea de traiectorie își pierde sensul, în acest caz.

Scanned with CamScanner

Există și o altă relație

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \qquad (5.9')$$

care arată că nedeterminarea în energia electronului ΔE este mai mică dacă se face o mediere a ei pe un interval de timp Δt mai mare.

Mișcarea electronului este descrisă de o undă, de lungime de undă $\lambda = \frac{h}{mv_e}$, unde mv_e este impulsul electronului. Probabilitatea P de a găsi electronul într-o regiune a spațiului este dată de pătratul funcției de undă ψ și este

$$\Delta P = |\psi|^2 \Delta V. \qquad (5.10)$$

Întrucît mișcarea electronului nu poate fi reprezentată printr-o traiectorie, se vorbește despre probabilitatea prezenței electronului, reprezentată prin *norul electronic* sau *orbitalul* său.

Funcția de undă pentru electron depinde de trei coordonate polare r, θ și φ (nucleul este în originea sistemului de referință). Corespunzător acestor coordonate, funcția de undă depinde de trei parametri, n, l, m, numiți *numere cuantice*: *principal*, *orbital* și *magnetic*.

Energia depinde numai de numărul cuantic principal n

$$E_n = -\frac{me^4}{32\,\pi^2 n^2 \hbar^2 \varepsilon_0^2};\ n \in \{N\} \qquad (5.11, a)$$

Momentul cinetic $\vec{L}$ depinde de l

$$\vec{L} = \sqrt{l(l+1)}\ \hbar \vec{u}_l;\ l \in [0, n-1]. \qquad (5.11, b)$$

Direcția momentului cinetic se cuantifică, adică proiecția lui pe o direcție (Δ) oarecare ia exclusiv valori discrete

$$L_\Delta = m\,\hbar \qquad (5.11.c)$$

Valorile lui m sînt date de $|m| \leqslant l$

Scanned with CamScanner

Momentul magnetic al mișcării electronului este

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)}\ \vec{u}_l ,$$

unde $e\hbar/2m$ este magnetonul Bohr-Procopiu.

Electronul are un *moment cinetic propriu* $\vec{S}$, datorat rotației în jurul axei proprii, denumit spin

$$\vec{S} = \sqrt{s(s+1)}\ \hbar\vec{u}_s . \qquad (5.11, \text{d})$$

Pentru electron $s = \frac{1}{2}$

Direcția momentului cinetic propriu se cuantifică, adică proiecția lui pe o direcție Δ oarecare ia exclusiv valori discrete

$$S_\Delta = m_s\hbar \qquad (5.11, \text{e})$$

Valorile lui m_s sînt $+\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{2}$

3. Atomul cu mai mulți electroni. Fiecare electron este caracterizat prin patru numere cuantice: n, l, m, m_s, ultimul fiind *numărul cuantic de spin*. Conform *principiului de excluziune* al lui Pauli în atom nu pot exista doi electroni avînd aceleași numere cuantice. Ei trebuie să aibă spini antiparaleli.

Toți electronii cu același n ocupă o *pătură*, iar cei cu același l o *subpătură*. În tabelul următor sînt date stările energetice în atomi (păturile K, L, M) în funcție de numerele cuantice n, l, m, m_s.

Numărul maxim de electroni pe care îl poate conține o pătură este

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \qquad (5.12)$$

Atomii cu un număr de electroni egal cu 2, 10, 28, 60 ... au pătura externă completă.

Există o periodicitate a proprietăților atomilor în funcție de numărul de electroni ai învelișului. Toți atomii avînd același număr de electroni în pătura exterioară au proprietăți asemănătoare.

Scanned with CamScanner

n	1 (K)	2 (L)			
l	0 (s)	1 (p)	1 (p)		
m	0	0	-1	0	$+1$
m_S	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$

4. Emisia stimulată. Emisia de radiaţie la dezexcitare se face conform relaţiei (5.1) şi este spontană. Dacă E_s şi E_i sînt două stări energetice ale atomului ($E_s > E_i$) şi se realizează condiţia ca în starea E_s să se afle mai mulţi atomi decît în starea E_i, prin trimiterea unei radiaţii de frecvenţă

$$\nu = \frac{E_s - E_i}{h} \tag{5.13}$$

se realizează o *tranziţie stimulată şi emisia stimulată a unei* radiaţii de aceeaşi frecvenţă. Amplificarea luminii prin emisie stimulată se numeşte *efect laser* (fig. 5.3).

Probabilitatea de tranziţie în unitatea de timp este definită prin :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t}\right) \tag{5.14}$$

în care ΔN este numărul de sisteme care fac tranziţie în intervalul de timp Δt, iar N numărul de sisteme nedezexcitate încă la începutul intervalului. Dacă la momentul iniţial numărul acestora era N_0

$$N = N_0 e^{-Pt} = N_0 e^{-t/\tau} \tag{5.15}$$

unde $\tau = \frac{1}{P}$, este timpul mediu de viaţă al stării excitaţiei.

Scanned with CamScanner

3 (M)									
0 (s)	1 (p)			3 (d)					
0	−1	0	+1	−2	−1	0	1	1	
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	

Radiația laser este : monocromatică, intensă, coerentă și precis direcționată.

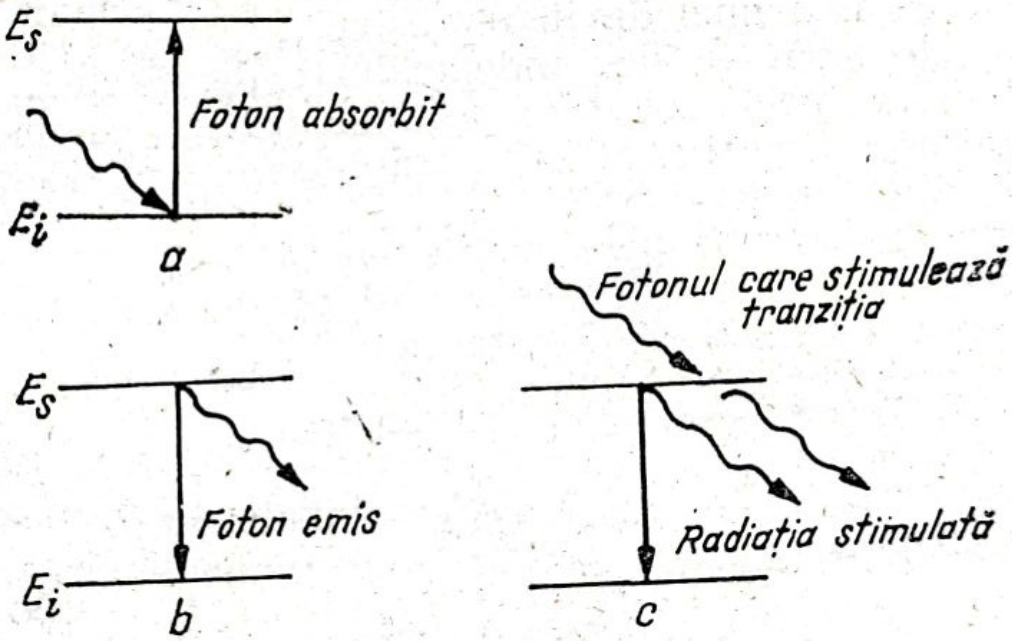


Fig. 5.3.

5.2. Nucleul atomic

1. **Structura nucleului.** Nucleul este format din două categorii de particule (*nucleoni*) : Z protoni și $A - Z = N$ neutroni. O specie nucleară (*nuclid*) este caracterizată prin două numere : Z (*număr atomic*) și A (*număr de masă*). Protonul are sarcina egală cu a electronului și masa de repaus $m_p = 1{,}007276$ u*. Neutronul este neutru, iar masa lui de repaus este $m_n = 1{,}008665$ u.

* u este unitatea atomică de masă egală cu a douăsprezecea parte din masa $^{12}_{6}C$: $1u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$kg.

Scanned with CamScanner

Raza nucleului R depinde de numărul de masă A

$$R = R_0 A^{1/3} \tag{5.16}$$

unde $R_0 = 1{,}45 \cdot 10^{-15}$m.

Masa nucleului M_N se determină cu spectroscopul de masă. Nucleele care au același Z dar A diferit se numesc *izotopi*; cele care au același A dar Z diferit sînt numite *izobari*.

Stabilitatea relativă a nucleului se explică prin existența forțelor nucleare, care nu sînt nici de natură electrică, nici gravitațională, fiind mult mai intense decît acestea (la scara nucleului). Forțele nucleare sînt centrale și au o rază de acțiune foarte mică ($r \approx 10^{-15}$ m $\div$ 10^{-14}m); la distanțe mai mici devin repulsive.

Forțele nucleare sînt independente de sarcină. Interacția se face prin schimb de particule (*pioni*) cu masă egală de aproximativ 280 ori masa de repaus a electronului** (teoria lui Yukawa).

Suma maselor experimentale m_p și m_n ale tuturor protonilor și neutronilor este diferită de masa experimentală a nucleului M. Diferența

$$[m_p Z + m_n (A - Z)] - M = \Delta m \tag{5.17}$$

se numește *defect de masă*. Defectului de masă îi corespunde energia

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \tag{5.18}$$

numită *energie de legătură* și care reprezintă energia necesară desfacerii nucleului în nucleonii componenți sau energia care se eliberează la formarea nucleului din nucleoni. Energia de legătură are expresia

$$E = W_{leg} = Z_{m_p} \cdot c^2 + (A - Z) m_n \cdot c^2 - M_N c^2 \tag{5.19}$$

Calculul energiilor se face cu MeV.

Raportînd energia de legătură la numărul nucleonilor se obține *energia de legătură medie pe nucleon*, care variază în funcție de Z.

** În mod analog interacției electromagnetice prin fotoni

Scanned with CamScanner

2. **Modele nucleare.** a) *Modelul picăturii.* Următoarele caracteristici ale nucleului permit o analogie cu proprietăţile picăturii de lichid :

— nucleele au aproape aceeaşi densitate ($\rho \approx 2{,}7 \cdot 10^{28}$ kg/m^3). Considerînd nucleul sferic, raza lui este $R = r_0 A^{1/3}$, unde $r_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-15}$ m, adică volumul nuclear este direct proporţional cu numărul de masă A ;

— forţele nucleare au caracter de saturaţie pentru nucleonii interiori şi nu au acest caracter pentru cei exteriori ;

— eliminarea unui nucleon poate fi comparată cu evaporarea unei picături ;

— mişcarea nucleonilor este analogă agitaţiei termice a unei molecule.

b) *Modelul păturilor.* Se constată experimental că :

— nucleele care au număr par de protoni şi neutroni sînt cele mai stabile (rezultă că nucleonii se grupează în perechi cu spini opuşi şi ocupă acelaşi nivel energetic) ;

— nucleele care au un număr de protoni sau de neutroni egal cu 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 ... (*numere magice*) au o energie de legătură medie pe nucleu mai mare decît celelalte, deci sînt mai stabile. (Periodicitatea unor proprietăţi nucleare dependente de numărul protonilor sau neutronilor sugerează ideea existenţei unor pături energetice cuantificate). Nucleonii se mişcă pe orbite independente (analog electronului în atom). Cuplajul nucleonilor este slab.

c) *Modelul unificat.* Nucleonul se mişcă în cîmpul determinat de ceilalţi nucleoni şi concomitent este angrenat într-o deplasare a întregii pături care perturbă prima mişcare.

3. **Transformări nucleare.** Stările instalabile ale nucleului sînt sau provocate de cauze externe (ciocniri) sau constituie o caracteristică intrinsecă a nucleului radioactiv.

O clasificare a transformărilor nucleare se dă în schema următoare :

spontană → *dezintegrare radioactivă* (α, β)

spontană → *dezexcitare nucleară* (γ)

Scanned with CamScanner

induse (provocate) ↗ *reacții nucleare*
induse (provocate) ↘ *excitări nucleare*

În cursul transformărilor nucleare se respectă următoarele legi de conservare:

— conservarea energiei
— conservarea impulsului
— conservarea momentului cinetic
— conservarea sarcinii .

Considerăm reacția

$$a + X \rightarrow Y + b$$

dintre particula proiectil a și nucleul țintă X:

Energia de reacție

$$Q = (m_a + m_X - m_b - m_Y)c^2 \qquad (5.20)$$

poate fi pozitivă (*reacție exoenergetică*) sau negativă (*reacție endoenergetică*).

Radioactivitatea este fenomenul de dezintegrare spontană a nucleului. Dezintegrarea se produce simultan cu transformarea nucleului (*transmutarea lui*). Se pot emite trei tipuri de radiații α, β, γ.

Studiul radiațiilor privește natura acestora, sarcina lor q, masa m, viteza v, numărul de particule emise, lungimea de undă, împrăștierea, efectul ionizant. Devierea în cîmpul electric sau magnetic este folosită pentru a se deduce raportul q/m și v. Sarcina q se poate deduce măsurînd sarcina totală Q a unui număr N de particule, cu ajutorul cilindrului Faraday.

Detectarea și înregistrarea se face cu următoarele aparate, grupate după proprietățile radiațiilor emise:

a) *Producerea fenomenului de fluorescență.*

Detectorul de scintilații cu tub fotomultiplicator (fig. 5.4). Scintilațiile produse de fotoni prin bombardarea unui cristal de iodură de sodiu se datoresc excitării atomilor cristalului. Tranzițiile stimulate de lumină (în domeniul vizibil sau ultraviolet) produc fenomenul fotoelectric pe un strat fotosensibil. Numărul electronilor este amplificat pe dinodele fotomultiplicatorului.

Scanned with CamScanner

Spintariscopul. Radiaţiile produc fluorescenţa ecranului de sulfură de zinc. Scintilaţiile sînt observate cu o luptă (fig. 5.5).

b) *Impresionarea emulsiilor fotografice.* Particula nucleară care trece prin emulsie (tratată corespunzător) produce granule de argint care sînt fixate şi developate. Pentru particule rapide se folosesc teancuri de straturi de emulsie fotosensibilă.

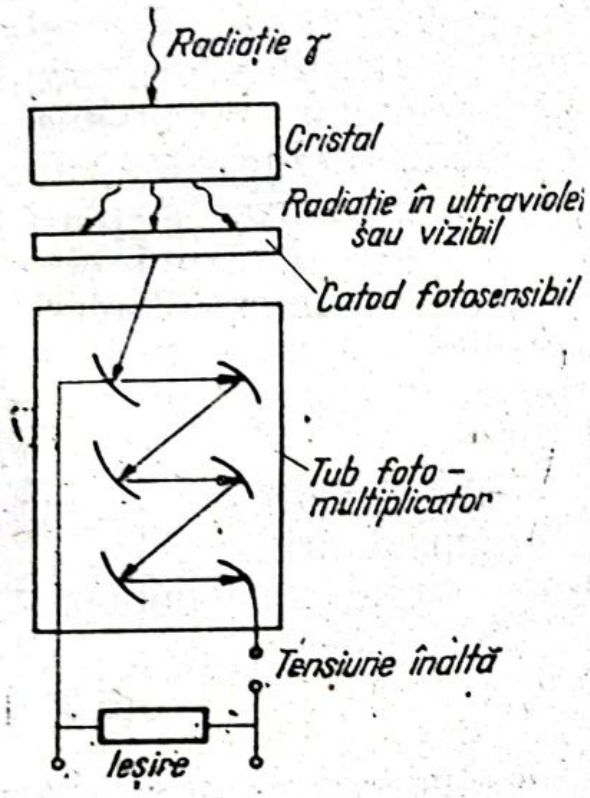


Fig. 5.4

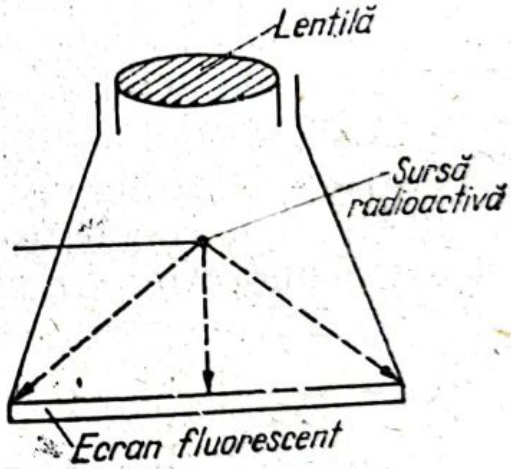


Fig. 5.5

c) *Ionizarea. Contorul Geiger-Müller* (fig. 5.6). Particula produce ioni la trecerea prin masa de gaz. Ionii se deplasează în cîmpul electric şi se generează o descărcare (impuls).

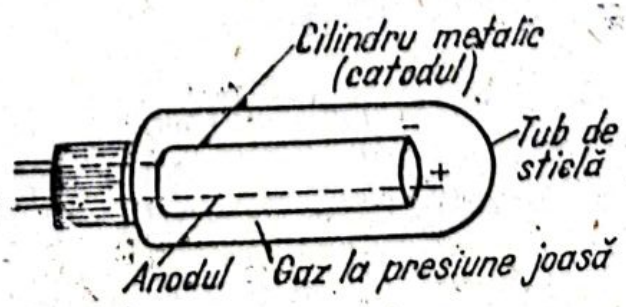


Fig. 5.6

Scanned with CamScanner

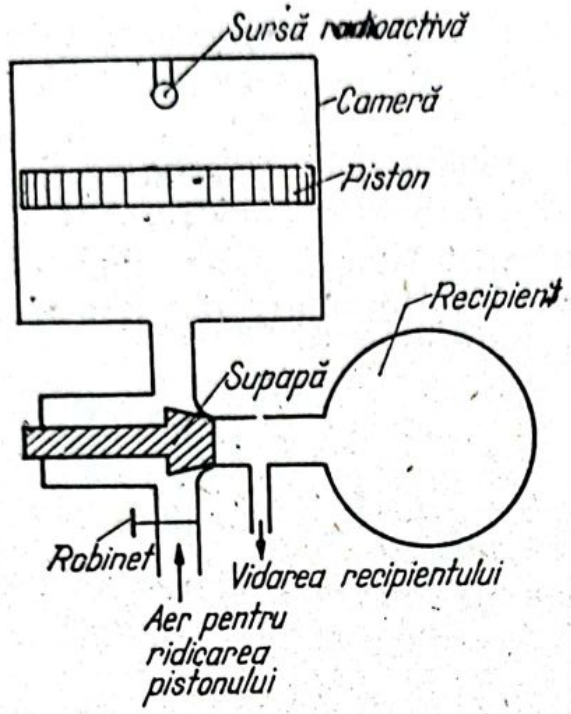


Fig. 5.7.

Camera cu ceață (*Wilson*) (fig. 5.7). La o temperatură dată, vaporii sînt în echilibru cu lichidul din care s-a format (sînt în stare saturantă). Echilibrul se modifică prin răcire bruscă, presiunea vaporilor rămînînd pentru un timp deasupra unei presiuni de echilibru. În prezența ionilor se produce o condensare rapidă. Particula lasă o urmă de ceață care poate fi văzută bine dacă este luminată lateral. Scăderea temperaturii se produce prin detenta provocată de evacuarea prin supapă a aerului care apasă pistonul.

Particulele cu sarcină electrică sînt deviate în cîmpul magnetic și li se poate măsura impulsul prin sarcina q, dacă se cunosc raza r a traiectoriei circulare și inducția magnetică B

$$mv = qrB. \tag{5.21}$$

Camera cu bule. Particulele produc centre de vaporizare într-un lichid supraîncălzit. Lichidul este un izolant cu tensiune superficială mică și cu o presiune de vaporizare înaltă. Starea de supraîncălzire se obține prin reducerea presiunii. Lichidul fierbe violent în jurul ionilor formați (se formează bule). Pentru studiul interacțiilor la energii obișnuite se folosește propan lichid, iar pentru energii mari, hidrogen lichid.

4. **Legea dezintegrării radioactive.** Notînd cu λ (*constanta de dezintegrare*) probabilitatea ca un nucleu (din N nuclee) să se dezintegreze în unitatea de timp este:

$$\lambda = -\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}. \tag{5.22}$$

Scanned with CamScanner

Numărul nucleelor nedezintegrate la momentul t, în funcţie de numărul lor N_0 la momentul iniţial este

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{5.23}$$

Legea dezintegrării este o *lege statistică*. Nu se poate spune care nucleu se dezintegrează la un moment dat, ci numai că probabilitatea dezintegării unui nucleu în unitatea de timp este constantă şi egală cu λ. Legea este valabilă pentru un mare număr de nuclee şi abaterile sînt cu atît mai mari cu cît numărul de nuclee este mai mic.

Logaritmarea relaţiei (5.18), dă, punînd condiţia

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2},$$

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{5.24}$$

$T_{1/2}$ se numeşte *timp de înjumătăţire* şi reprezintă timpul necesar pentru ca numărul nucleelor nedezintegrate să se reducă la jumătate din cel iniţial. $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = \Lambda$ este viteza de dezintegrare luată cu semn schimbat şi se numeşte *activitate* (se măsoară în dezintegrări pe secundă). Între Λ şi λ există relaţia)

$$\Lambda = \lambda N \tag{5.25}$$

cum se vede din definiţiile celor două mărimi.

Viaţa medie a unui nucleu de o specie dată este

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{5.26}$$

5. Transformările nucleelor se supun următoarelor legi de conservare :

— legea conservării numărului de nucleoni

— legea conservării sarcinii totale.

O transformare de tipul.

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + {}^{A''}_{Z''}a$$

trebuie să respecte cele două legi :

$$A = A' + A'' \quad \text{şi} \quad Z = Z' + Z''$$

Scanned with CamScanner

Legile de conservare permit aflarea noului nucleu (Y) cînd se știe cel vechi (X) și particula expulzată (a).

Există trei *familii radioactive*: uraniu-radiu, thoriu, actiniu, complet independete. Capii de serie sînt $^{238}_{92}U$, $^{239}_{90}Th$, $^{235}_{92}U$, iar ultimul element (stabil) este un izotop al plumbului (respectiv 206, 208, 207).

6. Tipuri de radiații a) *Radiația* α. Particula α este nucleu de heliu ($^4_2$He).

Cînd se emite o particulă α are loc o reacție de tipul

$$^A_Z X \longrightarrow ^{A-4}_{Z-2} Y + ^4_2\alpha \qquad (5.27)$$

Nucleul este un sistem stabil în care se realizează continuu echilibrul între forțele atractive nucleare și cele repulsive electrostatice. Acestea din urmă devin mai mari cu creșterea lui A și, prin urmare, stabilitatea scade la nucleele mai grele. Nucleul emite particule prin efect tunel. (Particulele α, care au în medie energia de ordinul a cîțiva MeV, ies din nucleu reușind să treacă o barieră de potențial mult mai mare). Se trece astfel la un sistem mai stabil.

b) *Radiația* β. Este formată din electroni sau pozitroni emiși conform schemelor

$$^A_Z X \longrightarrow ^A_{Z+1} Y + e^- \qquad (5.28)$$

sau

$$^A_Z X \longrightarrow ^A_{Z-1} Y + e^+ .$$

Particulele emise provin din reacțiile

$$\left.\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- \\ p &\rightarrow n + e^+ \end{aligned}\right\} \qquad (5.29)$$

prima producîndu-se spontan, a doua, prin energie primită din nucleu. Viața medie a neutronului este de 15,5 min. Cele două reacții constituie argumente în sprijinul naturii comune a celor doi nucleoni, neutronul fiind o stare excitată a protonului.

Teoretic ar fi trebuit ca particulele emise să aibă un spectru discontinuu, ceea ce nu corespunde experienței.

Scanned with CamScanner

Contradicţia s-a eliminat prin considerarea unei noi particule *neutrinul*

$$n \to p + e^+ + \tilde{\nu}_e$$
$$p \to n + e^- + \nu_e$$

particulă neutră cu masa de repaus nulă.

c) *Radiaţia* γ. Însoţeşte dezintegrările α şi β. Este determinată de dezexcitarea spontană a nucleului ($h\upsilon = E_1 - E_2$). Frecvenţa ν este superioară radiaţiei X, diferenţele energetice fiind mai mari.

7. **Reacţiile nucleare.** Sînt transformări nucleare produse prin bombardarea nucleului cu particule. Reacţia apare ca urmare a unei ciocniri ; de obicei, asupra unor nuclee ţintă cade un flux de particule.

O reacţie nucleară se scrie

$$X + a \to Y + b \qquad (5.30)$$

unde a şi X sînt particula-proiectil şi, respectiv, nucleul ţintă, iar b, Y — particula rezultată şi nucleul care ia naştere ca urmare a reacţiei.

Cazuri :

1) a este foton şi b nu este — *reacţie fotonucleară*

2) b este foton şi a nu este — *captură radioactivă*

3) $X = Y$ — are loc o *ciocnire* şi se produce *împrăştierea*

4) $X \neq Y$ — are loc o *transmutaţie*

Particulele care bombardează provin din : o dezintegrare, radiaţia cosmică, un accelerator de particule.

Reacţiile nucleare pot fi : *de activare, de fisiune, de fuziune.*

a) *Reacţia de activare.* Nucleul rezultat este radioactiv

$$a + X \to Y + b \qquad (5.31)$$

Formarea, provocată, a unui nucleu radioactiv a fost considerată ca un nou tip de radioactivitate (*artificială*). În fond, nu se deosebeşte de cea naturală.

b) *Reacţia de fisiune* constă în formarea din nucleul bombardat a două sau mai multor fragmente (Y_1, Y_2)

$$a + X \to Y_1 + Y_2 + b_1 + b_2 + \cdots$$

Scanned with CamScanner

Nucleul mai puţin stabil (numărul de masă A mare) se fragmentează în nuclee mai stabile (A mai mic). Deoarece energia de legătură medie pe nucleon este mai mare la fragmente, prin reacţie se eliberează energie (*reacţie exoenergetică*). Reacţia este spontană sau provocată.

Exemplu: fisiunea nucleului. $^{235}_{92}U$. Particulele care bombardează pot fi neutroni lenţi (energie $\frac{1}{40}$ eV); o reacţie posibilă este

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{138}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{95}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n \qquad (5.32)$$

Reacţia este exoenergetică. Dispozitivul în care se realizează reacţia controlată este *reactorul nuclear*. În reactor se produce o *reacţie în lanţ*.

Neutronii proveniţi din fisiunea izotopului 235 provoacă reacţii în lanţ la nucleele de acelaşi fel dacă sînt încetiniţi de substanţe moderatoare. Alţi neutroni lovesc nucleele izotopului 238 care nu întreţine reacţia în lanţ. Se produce plutoniu

$$^{0}_{1}n + {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{Np}^{*} + {}^{0}_{-1}\beta$$

$$^{239}_{93}\mathrm{Np}^{*} \rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{0}_{-1}\beta + \gamma \qquad (5.33)$$

(Np şi Pu sînt primele *elemente transuraniene*).

Reacţia în lanţ (5.33) se desfăşoară în reactor prin bombardarea barelor de uraniu introduse într-un moderator. Căldura degajată este preluată de o instalaţie de răcire.

Reacţia în lanţ este caracterizată prin factorul de multiplicare

$$k = R/A + P$$

unde R este numărul de neutroni rezultaţi, A neutronii absorbiţi, iar P cei pierduţi din reactor. Cînd $k > 1$ reacţia se amplifică, numărul nucleelor fisionate creşte exponenţial cu timpul; $k = 1$, reacţia se reproduce; $k < 1$, reacţia încetează. Pentru $k > 1$ reacţia se produce dacă masa este mai mare decît cea *critică*, astfel încît neutronii rezultaţi să nu scape din mediul fisionabil. Dacă reacţia nu e controlată se produce *explozia nucleară*. Controlul reacţiei se face cu materiale absorbante de neutroni (se obţine $k = 1$).

Scanned with CamScanner

c) *Reacția de fuziune* constă în unirea a două nuclee într-un nucleu nou care are energia medie pe nucleon mai mare. Reacția este exoenergetică. La mase egale energia degajată este de cîteva ori mai mare decît în fisiunea uraniului. Pentru fuziunea nucleelor sînt necesare temperaturi mari (10^9 °C), reacția numindu-se din acest motiv și *termonucleară*.

Două reacții posibile:

$$\begin{gathered} {}_1^1H + {}_1^1H \rightarrow {}_1^2H + {}_1^0\beta + \nu + 1{,}14 \text{ MeV} \\ {}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n + 17{,}6 \text{ MeV} \end{gathered} \qquad (5.34)$$

Întreținerea și controlarea reacției termonucleare constituie încă probleme în curs de cercetare.

5.3. Particule elementare

În tabelul 5.1. se dă o clasificare a particulelor elementare cunoscute în prezent și cîteva caracteristici ale lor.

1. Interacțiile particulelor. Criteriul clasificării interacțiilor este tăria. Tăria se apreciază după:

— parcursul pe care particula, cu ajutorul căreia se realizează interacția, îl are prin substanță;

— timpul de interacție.

Cu cît timpul și parcursul sînt mai mari cu atît interacția este mai slabă, și invers. Interacțiile sînt: *tari*, *electromagnetice*, *slabe* și *gravitaționale*.

a) *Interacții tari* sînt cele în care intervin forțele nucleare; ele au loc cu barioni și mezoni. Au durata de 10^{-20}s — 10^{-24}s. Particula de schimb prin care se realizează interacția este mezonul π.

b) *Interacțiile electromagnetice*. Forțele electromagnetice sînt sau de atracție sau de respingere, sînt centrale și depind de vitezele particulelor. Particula de schimb prin intermediul căreia se efectuează interacția este fotonul. Tăria acestei interacții este 1/1000 din tăria interacției nucleare, timpul de interacție fiind de 10^2—10^3 ori mai mare.

Scanned with CamScanner

Categoria	Nume	Simbol	Antiparticulă
Barioni	Hiperon omega	Ω^-	$\overline{\Omega^+}$
	Hiperon hi	Ξ^-	$\overline{\Xi^-}$
		Ξ°	$\overline{\Xi^\circ}$
	Hiperon sigma	Σ^-	$\overline{\Sigma^-}$
		Σ°	$\overline{\Sigma^\circ}$
		Σ^+	$\overline{\Sigma^+}$
	Hiperon lambda	Λ°	$\overline{\Lambda^\circ}$
	Neutron	n	$\overline{n}$
	Proton	p	$\overline{p}$
Mezoni	Mezon eta	η°	η°
	Mezon ka (caon)	K^+	$\overline{K^+}$
		K°	$\overline{K^\circ}$
	Mezon pi (pion)	π^+	π^-
		π°	π°
Leptoni	Mezon miu (miuon)	μ^-	μ^+
	Electron	e^-	e^+
	Neutroni miuonic	ν_μ	$\overline{\nu_\mu}$
	Neutrino electronic	ν_e	$\overline{\nu_e}$
	Foton (radiație gamma)	γ	γ

c) *Interacțiile slabe* sînt caracteristice leptonilor. Au tăria de $3 \cdot 10^{-15}$ ori față de cele nucleare. Particula de schimb nu a fost încă descoperită.

d) *Interacții gravitaționale.* Sînt de 10^{40} ori mai slabe decît cele nucleare la distanțele din nucleu. Acționează la distanțe mari. Nu au importanță în nucleu. Particula de schimb, încă nedescoperită (graviton?).

2. Conservarea numerelor cuantice. Interacțiile particulelor sînt caracterizate prin conservarea următoarelor numere cuantice:

a) *Numărul barionic* care este 1 pentru nucleoni și hiperoni și -1 pentru antiparticulele lor; pentru cele-

Scanned with CamScanner

Tabelul 5.1

elementare

Masa (m_e)	Numărul barionic	Numărul leptonic	Numărul stranietate	Viața medie (s)
3280	+1	0	−3	$\approx 10^{-10}$
2584	+1	0	−2	$1{,}2 \cdot 10^{-10}$
2572	+1	0	−2	$2{,}1 \cdot 10^{-10}$
2343	+1	0	−1	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$
2333	+1	0	−1	$\approx 10^{-20}$
2327	+1	0	−1	$5{,}5 \cdot 10^{-11}$
2183	+1	0	−1	$1{,}8 \cdot 10^{-10}$
1839	+1	0	0	700
1836	+1	0	0	stabil
1074	0	0	0	$\approx 10^{-20}$
966	0	0	+1	$8{,}5\ 10^{-7}$
975	0	0	+1	$6{,}4 \cdot 10^{-9}$
273	0	0	0	$1{,}8 \cdot 10^{-8}$
264	0	0	0	$1{,}3 \cdot 10^{-16}$
207	0	+1	1	$1{,}5\ 10^{-6}$
1	0	+1	0	stabil
0	0	+1	0	stabil
0	0	+1	0	stabil
0	0	0	0	stabil

lalte particule este zero. Exemplu :

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}$$

$$(1) = (1) + (0) + (0)$$

Reacțiile în care nu se conservă numărul barionic sînt interzise.

b) *Numărul leptonic*, care este 1 pentru leptoni și −1 pentru antileptoni. Valoarea lui este zero pentru restul particulelor. Exemplu :

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \tilde{\nu}$$

$$(-1) = (-1) + (1) + (-1)$$

Scanned with CamScanner

c) *Numărul de stranietate* (trecut în tabel) se conservă. Exemplu

$$\bar{K}^+ + p \rightarrow \Xi^\circ + K^\circ$$

$$(-1) + (0) = (-2) + (1).$$

Oricare particulă are *antiparticula* ei. În principiu antiparticulele formează *antimateria*. Antiparticula are aceleaşi proprietăţi ca şi particula, exceptînd sarcina care e de semn opus şi spinul care este de sens opus.

Pentru orice proces din natură există un proces simetric care nu se distinge de procesul originar (legea parităţii).

5.4 Acceleratoare de particule

Clasificarea acceleratoarelor : a) *directe* b) *de inducţie* c) *de rezonanţă*

1. **Directe**. Cîmpul electric staţionar acţionează asupra particulelor încărcate. Particula străbate o singură dată acceleratorul. Exemplu :

Generatorul Van de Graaff. Purtătorii de sarcină electrică sînt transportaţi pe electrodul S cu ajutorul benzii B izolatoare (fig. 5.8). Purtătorii trec de pe bandă pe sferă

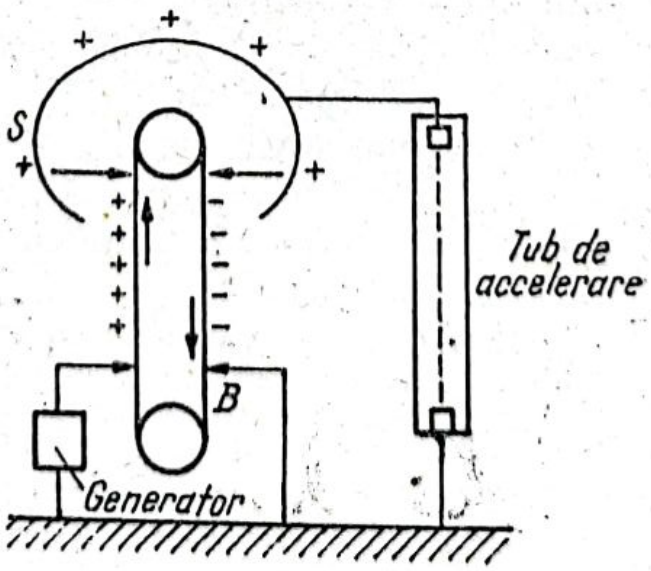


Fig. 5.8

Scanned with CamScanner

prin același efect cunoscut la cilindrul Faraday. Creșterea potențialului V al electrodului S este mărginită de permitivitatea limitată a aerului

$$V_{max} = E_d R \qquad (5.35)$$

unde $E_d \approx 30.10^5$ V/m, iar R raza sferei. Pentru mărirea tensiunii de accelerare există următoarele posibilități: se introduce generatorul într-un gaz la presiune ridicată se alege o sferă de rază mai mare, se pun două acceleratoare în serie (*tandem*). Focalizarea în tubul de accelerare este electrostatică. Particulele pot fi accelerate pînă la 10 MeV.

2. De inducție. Cîmpul accelerator este generat de un cîmp magnetic variabil. Acceleratorul poate fi *liniar* sau *ciclic*. În acest ultim caz particula străbate de mai multe ori dispozitivul de accelerare. Exemplu:

Betatronul. Electronii proveniți dintr-un tun electronic se mișcă pe un cerc de rază constantă, accelerați fiind de cîmpul electric creat de tensiunea electromotoare indusă. Stabilitatea și focalizarea electronului este asigurată prin forma cîmpului magnetic. Timpul de accelerare este 1/4 din perioada curentului electric alternativ folosit, pentru ca $\frac{dB}{dt}$ să-și păstreze semnul. Energia maximă: 350MeV.

3. De rezonanță. Cîmpul electric este produs de un sistem de electrozi alimentați de o sursă de înaltă frecvență. Particulele străbat dispozitivul în grupe (pachete). Există intervale de timp de accelerare și intervale în care particulele sînt ecranate. Focalizarea e magnetică. Condiția esențială este sincronizarea timpului de accelerare cu faza tensiunii acceleratoare. Pot fi liniare și ciclice. Exemple:

Acceleratorul liniar (fig. 5.9). Accelerarea se face între tuburile metalice (electrozi) așezate coaxial în tubul vidat. Electrozii sînt conectați la sursă astfel ca la ieșire particula să găsească un cîmp de accelerare (condiția de sincronism sau rezonanță). Performanța: 20 GeV.

Scanned with CamScanner

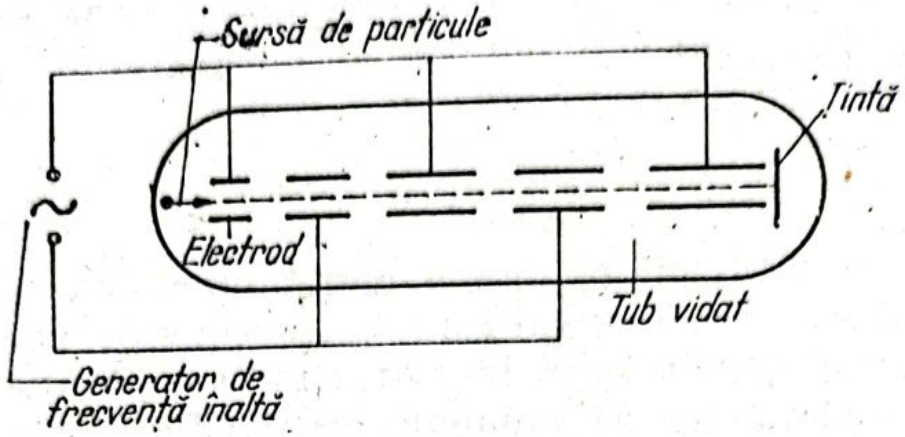


Fig. 5.9

Ciclotronul (fig. 5.10). Particula furnizată de sursă (S) este accelerată între *duanți* (D_1, D_2) sub influența cîmpului electric creat de un generator de înaltă frecvență.

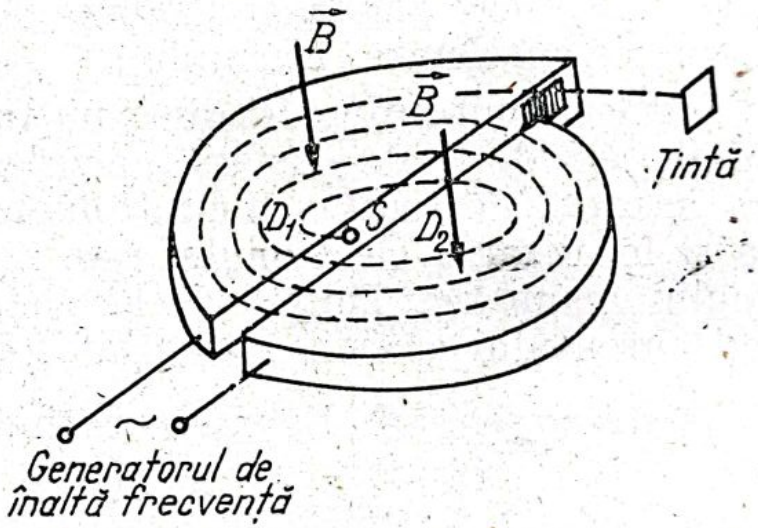


Fig. 5.10

În duant, sub acțiunea forței Lorentz, particula se deplasează pe un semicerc și revine pentru o nouă accelerare găsind cîmpul electric cu polaritatea corespunzătoare la momentul necesar (condiția de sincronism). Perioada T este constantă, deși raza r a traiectoriei crește o dată cu viteza v obținută

$$r = \frac{mv}{eB}, \qquad T = 2\pi \frac{m}{eB}, \tag{5.36}$$

Scanned with CamScanner

Lei 165

ISBN 973—31—0368—3

Scanned with CamScanner